

ANNALI

DI

MATEMATICA

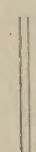
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

Francesco Brioschi

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi *in Pisa*
Luigi Cremona *in Roma*



Ulisse Dini *in Pisa*
Giuseppe Jung *in Milano*

SERIE III.ª - TOMO VI.º

MILANO,
TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

1901.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO VI.° (SERIE III.ª)

Sulla teoria delle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni.

(*Di* Aurelio Dall'Acqua, *a Venezia*)

PREFAZIONE.

Il Ricci nella sua Memoria *Sui sistemi di congruenze ortogonali* (*), ha determinato le proprietà fondamentali delle congruenze di curve, in funzione di quegli invarianti a tre indici γ_{hkl}, su cui egli impernia tutta la sua teoria. Ma dalla considerazione delle linee della congruenza egli potè desumere soltanto il significato geometrico di alcuni fra quegli invarianti, mentre quello degli altri è strettamente legato ad un ente connesso colla congruenza in modo intimo e univoco, col complesso cioè di *tutte* le congruenze ad essa ortogonali.

Qui la ragione prima del mio studio, in cui ad ogni congruenza è associato (e lo studio dell'una procede del pari con quello dell'altro) questo insieme di congruenze ortogonali, che io chiamo *complesso ortogonale*, o semplicemente *complesso*, quando non ne venga ambiguità. E dalla Memoria del Ricci, riassunta per la parte che ci interessa, nell'Introduzione, le mosse di questo lavoro.

Fra i campi più spigolati della geometria differenziale, e pur così lontani ancora dall'essere mietuti, è la teoria delle famiglie di superfici, di cui si trova tanta parte nelle opere del Lamè prima, poi del Darboux, del Raffy, del Bonnet, in Francia; in Germania del Voss, del Weingarten, e di tanti

(*) G. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* (Memorie dei Lincei, Ser. V, Vol. V.)

altri. Come è noto, le normali di tali superfici inviluppano delle congruenze di curve, le cui traiettorie ortogonali giacciono quindi sulle superfici, ne costituiscono tutte le linee, e in certo modo le generano. Poi che in questo caso le linee generanti il *complesso* si riducono a generare una famiglia di superfici, il complesso in ogni caso può venir considerato come generalizzazione di questa famiglia.

D'altra parte si riattacca alla mia teoria, come caso particolare, anche la teoria delle congruenze rettilinee, applicata ed applicabile in tanto e così vario modo alle questioni più importanti della scienza, e i cui fondamenti furono posti dal Kummer nella sua celebre Memoria: *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (*) arricchita dei recenti lavori del Darboux, del Cosserat, del Guichard, del Voss, ecc.

E poichè apparisce evidente che in molte ricerche lo studio delle congruenze curvilinee e dei loro complessi ortogonali, come più generale di quelli citati or ora, debba dar risultamenti più generali ed importanti, ed una larghezza di veduta maggiore, non mi parve inutile fissarne le linee generali.

Nè si creda, e tutta l'opera sta a dimostrar questo asserto, che la generalità maggiore tolga di precisione o di evidenza alle formole, di concretezza ai teoremi.

Troveremo anzi teoremi straordinariamente semplici, esprimenti concetti rigidamente determinati, e formole che mostreranno chiaramente la genesi dei teoremi e in cui le notazioni scelte saranno in particolar modo adatte alle deduzioni per i più notevoli casi particolari.

Per dar maggior concretezza all'opera mia ho limitato le ricerche allo spazio con tre dimensioni, avendo di mira le proprietà, certo più direttamente interessanti, dello spazio euclideo. Ma poichè per restringere ancor più il campo mi sono in questo primo lavoro trattenuto nello studio delle proprietà dipendenti direttamente dall'espressione dell'elemento lineare, prescindendo dalla curvatura dello spazio e dalle flessioni cui possa venir assoggettato, ancora senza perder nulla d'evidenza e di semplicità ho scelto per campo lo spazio *qualunque* con tre dimensioni, perchè non ne venisse una restrizione vana e non restasse alcun dubbio sul campo di validità dei teoremi.

Io credo che sia veramente nuova questa idea di associare ad ogni congruenza le sue traiettorie ortogonali, e di definire per l'ente così generato dei concetti di curvatura e dei concetti di linea geodetica, linea di curva-

(*) *Journal von Crelle*, Band 57.

tura, asintotica, e così via (le ortogonali canoniche sono definite anche dal Ricci). Soltanto seppi or non è molto che l'abate Issaly nell'87 aveva presentato una Memoria cui faceva seguito un'altra nell'88, alla Società matematica di Francia (*) in cui egli studia un ente che chiama *pseudo-superfice*, e su cui in modo analogo al mio estende i concetti di cui ho ora parlato.

Ma anzichè partire da una congruenza e considerar *tutte* le congruenze ortogonali, egli parte da una superfice, ne deforma (con una deformazione infinitesima) le linee, ottenendo nuove linee che non giacciono in generale più sopra una superfice; e a queste nuove linee finalmente egli associa la congruenza (rettilinea) delle normali, trascurando *tutte le altre* traiettorie ortogonali della congruenza. All'insieme di quelle traiettorie che egli considera, dà il nome di pseudo-superfice. Egli ritrova così per via piuttosto artifiziosa ed indiretta alcune proprietà analoghe alle mie, e che a me invece scaturiscono in modo semplice, grazie al metodo di *calcolo differenziale assoluto*, che vi ho adoperato costantemente.

L'opera dell'Issaly non è scevra però da inesattezze.

*
* *

Non traccio qui le linee del mio lavoro, perchè troppo mi sono indugiato, e la lunghezza del cammino mi incalza. Il diffuso indice dei paragrafi basterà a dare un'idea della traccia. Mi limito soltanto a dichiarare che nell'ultimo capitolo non intesi fare una trattazione completa delle congruenze di cui si tien ivi parola, ma solo una elementare applicazione dei risultamenti dei precedenti capitoli, poco aggiungendo alle proprietà già note.

Dirò piuttosto che oltre alle Memorie citate del Ricci e del Kummer, mi furono di guida o d'aiuto o d'utile confronto, la *Teoria delle superficie,* le Memorie: *Dei covarianti e controvarianti di una forma differenziale e del loro uso nell'analisi applicata,* e *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque,* del Ricci (**); l'opera del Bianchi, *Lezioni di geometria*

(*) Issaly, *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites.* (Bulletin de la Societé mathématique de France, 1887.) — *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces.* Ibidem, 1888.

(**) *Teoria delle superficie* (lit.), Drücker, Padova, 1898. — *Dei covarianti,* ecc., nella pubblicazione offerta dall'Università di Padova all'Università di Bologna nel suo centenario. — *Sui gruppi,* ecc. Memorie della Società italiana delle Scienze, Ser. 3.ª, Tom. XII.

differenziale; l'opera magistrale del DARBOUX (*) e la Memoria: *Sur les coordonnées curvilignes* dello stesso; l'*Étude des elassoïdes* del RIBAUCOUR (**), le Memorie del BONNET, del COSSERAT, del DÉMARTRE, del GUICHARD, del RAFFY nei *Comptes Rendus* de l'Académie des Sciences, nei *Memoires couronnés* de l'Académie de Belgique, e nel *Bulletin* de la Societé mathematique de France; del VOSS e del LIE nei *Mathematische Annalen* e nei *Berichte* zu Leipzig.

Ricordo qui in modo particolare una Nota del prof. LEVI-CIVITA (***) sulle congruenze isotrope, per la coincidenza perfetta di metodi e di risultamenti (che io ho poi completato e ampliato) cui eravamo giunti l'uno all'insaputa dell'altro; coincidenza che parrebbe strana se non fosse conseguenza necessaria dei metodi di calcolo differenziale assoluto, e che di questo dimostrerebbe una volta di più, se ve ne fosse bisogno, la meravigliosa rigidezza e semplicità.

INTRODUZIONE (****).

Indichiamo con

$$d\,s^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, d\,x_r\, d\,x_s \equiv \varphi$$

una forma quadratica positiva, che assumeremo come quadrato dell'elemento lineare di una varietà V_3 con tre dimensioni. Se consideriamo, come è sempre possibile, la nostra varietà giacente in uno spazio piano Σ_n con un numero n sufficiente di dimensioni, sarà (indicando con y_h le coordinate cartesiane ortogonali di Σ_n, e con $y_{h/r}$ le loro derivate rispetto alle x_r)

$$a_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{h}\, y_{h/r}\, y_{h/s}\,.$$

(*) *Sur la théorie général des surfaces.* Paris, 1895.

(**) Memoires couronnés de l'Acad. de Belgique, 1887.

(***) *Sulle congruenze di curve.* (Atti dei Lincei, Ser. V, Vol. VIII.)

(****) I metodi qui adoperati sono quelli del *Calcolo differenziale assoluto*, e le derivazioni rispetto alle x si intenderanno senz'altro come derivazioni covarianti o controvarianti (rispetto a φ), secondo che porremo in basso o in alto gli indici corrispondenti. Quanto ai metodi di calcolo, cfr. le opere del RICCI e principalmente: *Teoria delle superficie*, Drücker, Padova, 1898.

Una

$$\lambda^{(r)} = \frac{d\,x_r}{d\,s} \quad (\Sigma_r\, \lambda_r\, \lambda^{(r)} = 1), \tag{1}$$

ci definisce una congruenza (che indicheremo con λ): $d\,s$ è il suo elemento lineare.

Data la λ, esistono infinite coppie di congruenze, ortogonali in ogni punto fra loro e alla λ. Indicatane una coppia con λ_1, λ_2, valgono le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_r &= \sqrt{a}\left\{ \lambda_1^{(r+1)}\, \lambda_2^{(r+2)} - \lambda_1^{(r+2)}\, \lambda_2^{(r+1)} \right\} = \Sigma_{st}\, \varepsilon_{rst}\, \lambda_1^{(s)}\, \lambda_2^{(t)} \\ \lambda^{(r)} &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{ \lambda_{1/r+1}\, \lambda_{2/r+2} - \lambda_{1/r+2}\, \lambda_{2/r+1} \right\} = \Sigma_{st}\, \varepsilon^{(rst)}\, \lambda_{1/s}\, \lambda_{2/t}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove il sistema ε_{rst} è definito dalle (*):

$$\varepsilon_{r\,r+1\,r+2} = \sqrt{a}$$

$$\varepsilon_{rst} + \varepsilon_{srt} = 0$$

$$\varepsilon_{rst} + \varepsilon_{rts} = 0$$

(ricorderemo anche $\varepsilon_{rstu} = 0$).

Nelle (2) abbiamo ammesso implicitamente che il verso positivo degli angoli vada dalla λ alla λ_1, da questa alla λ_2, e infine di nuovo alla λ.

Le formole analoghe alle (1), (2), ma risolute rispetto alle λ_1, λ_2, si ottengono da quelle scritte, ponendo $\lambda \equiv \lambda_3$, e facendo una conveniente rotazione d'indici.

Indichiamo con λ_h una qualunque delle congruenze λ_1, λ_2, λ_3; con $\lambda_{h/r}$ il suo sistema coordinato covariante; con $\lambda_{h/rs}$ la derivata covariante, rispetto ad x_s, di $\lambda_{h/r}$; e introduciamo col Ricci gli invarianti

$$\gamma_{hkl} = \Sigma_{rs}\, \lambda_{h/rs}\, \lambda_k^{(r)}\, \lambda_l^{(s)},$$

ove

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0.$$

Potremo scrivere:

$$\lambda_{h/rs} = \Sigma_{kl}\, \gamma_{hkl}\, \lambda_{k/r}\, \lambda_{l/s}\,. \tag{3}$$

(*) Cfr. Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni.* Memoria citata. — Qui e sempre per lo innanzi le somme che compaiono negli indici, si intenderanno come rotazioni eseguite su questi.

Mediante una nuova derivazione ed una eliminazione delle derivate terze, scrivendo:

$$\gamma_{hk} = \frac{d\gamma_{h+1h+2k+1}}{d s_{k+2}} - \frac{d\gamma_{h+1h+2k+2}}{d s_{k+1}} + \Sigma_l \gamma_{h+1h+2l}(\gamma_{lk+1k+2} - \gamma_{lk+2k+1}) +$$

$$+ \gamma_{hh+1k+2}\gamma_{hh+2k+1} - \gamma_{hh+1k+1}\gamma_{hh+2k+2},$$

abbiamo

$$\gamma_{hk} = \Sigma_{rs}\, \alpha^{(rs)} \lambda_{h|r} \lambda_{k|s}, \qquad (L)$$

da cui scende:

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh}. \qquad (L_1)$$

Di queste solo le (L_1) sono indipendenti dagli $\alpha^{(rs)}$ (simboli del Riemann relativi alle forme ternarie), e quindi dalla curvatura della nostra varietà. Indicando con α_{hk} il coseno dell'angolo che una λ_h fa con una λ'_k, sappiamo che valgono le

$$\Sigma_r \lambda_h^{(r)} \lambda'_{k|r} = \alpha_{hk}.$$

Date quindi due terne $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ di congruenze ortogonali, sarà:

$$\lambda'_{h|r} = \Sigma_k \alpha_{kh} \lambda_{k|r}: \qquad (4)$$

se λ_3 e λ'_3 coincidono, le (4) assumono la forma:

$$\lambda'_r \equiv \lambda_r$$

$$\lambda'_{1|r} = \cos\alpha\, \lambda_{1|r} + \operatorname{sen}\alpha\, \lambda_{2|r}$$

$$\lambda'_{2|r} = \cos\alpha\, \lambda_{2|r} - \operatorname{sen}\alpha\, \lambda_{1|r},$$

dove α è l'angolo che la λ'_1 fa colla λ_1. E indicando con γ'_{hkl} i γ_{hkl} relativi alla terna λ', sarà:

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_{313} &= \cos\alpha\, \gamma_{313} + \operatorname{sen}\alpha\, \gamma_{323} \\ \gamma'_{323} &= \cos\alpha\, \gamma_{323} - \operatorname{sen}\alpha\, \gamma_{313} \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_{311} &= \cos^2\alpha\, \gamma_{311} + \operatorname{sen}^2\alpha\, \gamma_{322} + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(\gamma_{312} + \gamma_{321}) \\ \gamma'_{322} &= \cos^2\alpha\, \gamma_{322} + \operatorname{sen}^2\alpha\, \gamma_{311} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(\gamma_{312} + \gamma_{321}) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_{312} &= \cos^2\alpha\, \gamma_{312} - \operatorname{sen}^2\alpha\, \gamma_{321} + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(\gamma_{311} - \gamma_{322}) \\ \gamma'_{321} &= \cos^2\alpha\, \gamma_{321} - \operatorname{sen}^2\alpha\, \gamma_{312} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(\gamma_{311} - \gamma_{322}) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\gamma'_{123} &= \gamma_{123} + \frac{d\alpha}{ds} \\
\gamma'_{121} &= \left(\gamma_{121} + \frac{d\alpha}{ds_1}\right)\cos\alpha + \left(\gamma_{122} + \frac{d\alpha}{ds_2}\right)\operatorname{sen}\alpha \\
\gamma'_{122} &= \left(\gamma_{122} + \frac{d\alpha}{ds_2}\right)\cos\alpha - \left(\gamma_{121} + \frac{d\alpha}{ds_1}\right)\operatorname{sen}\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (\alpha_4)$$

Osserviamo che fra una congruenza e il suo complesso ortogonale vi è corrispondenza univoca; assumeremo quindi come sistema coordinato dell'uno quello dell'altra: indicheremo poi un complesso ortogonale ad una λ col nome di *complesso* λ.

Ho già fatto osservare in una mia Nota presentata all'Istituto Veneto (*) che il complesso (considerando V_3 immerso in un Σ_n) ammette in ogni punto un piano di Σ_n tangente (tangente cioè a tutte le sue linee in quel punto) ed ∞^1 piani normali, tangenti alla congruenza ortogonale. Le linee di questa si diranno *traiettorie ortogonali del complesso*; si dirà che due complessi si *tagliano sotto l'angolo* α quando si incontrino sotto tale angolo le sue traiettorie ortogonali; e si dirà infine *intersezione di due complessi* quella congruenza che giace sopra ambedue, e che perciò riesce ortogonale alle traiettorie ortogonali di ambedue i complessi.

CAPITOLO I.

1. Ci gioverà in molte ricerche la considerazione di una congruenza, le cui linee si mantengano parallele per uno spostamento in una determinata direzione. Per una nota osservazione del Poincaré, almeno in un intorno convenientemente piccolo, ciò è sempre possibile, a meno di infinitesimi d'ordine superiore. Sia μ questa congruenza (elemento lineare ds'), sia la direzione di spostamento quella di una congruenza ν ($d\sigma$ il suo elemento lineare): indicando con η_h ($h = 1, 2, \ldots n$) i coseni di direzione della μ nello spazio piano Σ_n

$$\left(\text{cioè } \eta_h = \frac{dy_h}{ds'} = \Sigma_t\, y_{h/t}\, \mu^{(t)}\right), \qquad (1)$$

(*) A. Dall'Acqua, *Ricerche sulle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni.* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Tom. LIX, Parte II.)

la condizione cui deve sodisfare la μ è data dalla

$$\frac{d\eta_h}{d\sigma} = 0.$$

Per la (1) questa si scrive:

$$\Sigma_{st}\,(y_{h|ts}\,\mu^{(t)} + y_h^{(t)}\,\mu_{ts})\,\nu^{(s)} = 0,$$

e ricordando le $\Sigma_h\, y_{h|ts}\, y_{h|r} = 0$ (*) finalmente:

$$\Sigma_s\,\mu_{rs}\,\nu^{(s)} = 0. \qquad (2)$$

2. Prendiamo intanto da considerare la rotazione di una λ intorno ad una qualunque λ_h, corrispondentemente a uno spostamento elementare lungo questa.

Essa corrisponderà in ogni punto P alla variazione elementare dell'angolo, che la λ fa con una retta fissa m passante per P e giacente nel piano ortogonale alla λ_h: ossia, introducendo una congruenza μ che sia tangente in P alla m, e si mantenga parallela per uno spostamento $d\,s_h$, essa sarà la variazione corrispondente a $d\,s_h$ dell'angolo α, definito dalla

$$\Sigma_r\,\mu_r\,\lambda^{(r)} = \cos\alpha.$$

Derivando, per la (2) $(\nu = \lambda_h)$,

$$\Sigma_{rs}\,\mu^{(r)}\,\lambda_{rs}\,\lambda_h^{(s)} = -\operatorname{sen}\alpha\,\frac{d\alpha}{d s_h}. \qquad (3)$$

Ma essendo la μ ortogonale alla λ_h, tenuto conto del verso positivo degli angoli,

$$\mu_r = \cos\alpha\,\lambda_r + (-1)^k \operatorname{sen}\alpha\,\lambda_{k|r} \quad k \neq 3,\ h,$$

e per questa, dalla (3),

$$(-1)^h\,\gamma_{3kh} = \frac{d\alpha}{d s_h},$$

che è indipendente dal valore iniziale di α. Il primo membro di questa ci dà la rotazione cercata.

(*) Dalle $a_{rs} = \Sigma_h\, y_{h|r}\, y_{h|s}$, per derivazione covariante rispetto ad x_t si ha:

$$\Sigma_h\, y_{h|rt}\, y_{h|s} + \Sigma_h\, y_{h|r}\, y_{h|st} = 0,$$

e in questa scambiando prima r con s e sottraendo, poi s con t e sottraendo dall'ultima ottenuta, si ha la formola enunciata.

Indicando con A la semisomma delle rotazioni elementari di una λ in due direzioni ortogonali λ_1, λ_2, avremo:

$$2A = \gamma_{312} - \gamma_{321} = \Sigma_{rst}\, \lambda_{rs}\, \lambda_t\, \varepsilon^{(rst)}. \qquad (4)$$

Questa ci dice che A è costante intorno ad un punto, indipendente cioè dalla coppia λ_1, λ_2.

La curvatura della proiezione di una λ_h sul piano normale al complesso λ, e tangente alla λ_h (curvatura che chiameremo *curvatura normale*) si ha calcolando la variazione, corrispondente ad uno spostamento $d\,s_h$, dell'angolo che la λ_h fa colla tangente alla λ nel punto P che si considera.

Assumendo dunque una μ tangente alla λ in P, e sodisfacente alle (2) $(\nu = \lambda_h)$, posto

$$\Sigma_r\, \mu_r\, \lambda_h^{(r)} = \cos\alpha,$$

abbiamo per derivazione $\left(\text{in } P \;\; \alpha = \frac{\pi}{2}, \;\; \mu_r = \lambda_r\right)$:

$$\frac{d\,\alpha}{d\,sh} = -\,\Sigma_{rs}\, \lambda_{h/rs}\, \lambda^{(r)}\, \lambda_h^{(s)} = \gamma_{3hh}\,.$$

Poichè la curvatura deve misurare l'allontanarsi della λ_h dalla normale, assumeremo l'angolo $\alpha = \lambda\,\lambda_h$ come positivo, per qualunque valore di h: dunque γ_{3hh} è la curvatura normale della λ_h sul complesso λ.

Considerando anche qui la semisomma (H) delle curvature normali di due λ_1, λ_2, abbiamo:

$$2H = \gamma_{311} + \gamma_{322} = \Sigma_{rs}\, a^{(rs)}\, \lambda_{rs}\,, \qquad (5)$$

cioè (essendo H indipendente da λ_1, λ_2) « La somma delle curvature normali di due congruenze ortogonali di un complesso è costante intorno ad un punto ».

Daremo ad H il nome di *curvatura media* del complesso λ.

Per avere la curvatura in un punto P della proiezione di una λ_h sul piano tangente al complesso λ (*curvatura tangenziale*), basterà determinare la variazione, corrispondente allo spostamento $d\,s_h$, dell'angolo che la λ_h fa colla tangente alla λ_k $(k \neq 3,\ h)$ in P. Prendendo ancora una μ, tangente in P alla λ_k $\left(\text{in } P \;\; \mu_r = \lambda_{k/r}, \;\; \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, dalla

$$\Sigma_r\, \mu_r\, \lambda_h^{(r)} = \cos\alpha,$$

si ha:

$$\frac{d\alpha}{d s_h} = \gamma_{khh} .$$

Trattandosi ancora di una curvatura, assumeremo sempre $\alpha = \widehat{\mu \lambda_h}$ come positivo, quindi γ_{khh} $(k \mp 3,\ h)$ rappresenta la curvatura tangenziale cercata.

3. Veniamo alla considerazione di alcune linee notevoli sui complessi. La linea λ_1 lungo cui la rotazione elementare della λ è media $(= A)$, è definita dalla

$$-\gamma_{321} = A,$$

a cui equivale per la (4) la

$$\gamma_{312} = A.$$

Leggiamo in queste che tali linee sono due e in ogni punto ortogonali fra loro: esse sono note sotto il nome di *linee ortogonali canoniche;* il Ricci (*) ha dimostrato che sono sempre reali.

La loro equazione caratteristica si ottiene sottraendo le due testè scritte:

$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0. \tag{6}$$

Pure due, e ortogonali in ogni punto, sono le linee la cui curvatura normale è uguale alla media. La loro equazione è

$$\gamma_{311} - \gamma_{322} = 0. \tag{7}$$

Se due λ'_1, λ'_2 sono di tal natura

$$(\gamma'_{311} - \gamma'_{322} = 0), \tag{7$_1$}$$

abbiamo (per le (α_2) dell'Introduzione):

$$(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\,(\gamma_{311} - \gamma_{322}) - 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,(\gamma_{312} + \gamma_{321}) = 0,$$

la quale, supponendo le λ_1, λ_2 ortogonali canoniche, quando non sia insieme colla (6) verificata anche la (7), dà:

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4},$$

dunque: « Le linee la cui curvatura normale è uguale alla media, sono le « *bisettrici delle ortogonali canoniche.* » Anch'esse quindi sono sempre reali.

(*) G. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* Memoria citata.

4. Se le traiettorie ortogonali di una λ giacciono sopra una famiglia di superfici, cioè se il complesso λ degenera in una famiglia di superfici, chiameremo geodetiche del complesso quelle linee λ_h $(h=1,\ 2)$ che sono geodetiche sulle superfici, cioè quelle per cui si annulla identicamente la variazione prima (sul complesso) dell'integrale

$$s_h = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma_{rs}\, a_{rs} \frac{d\,x_r}{d\,t} \frac{d\,x_s}{d\,t}}\, d\,t, \tag{8}$$

dove s_h è l'arco della λ_h.

Nel caso generale (λ comunque) converremo di chiamare ancora *geodetiche di un complesso* le linee di questo, per cui la variazione prima (sul complesso) del secondo membro della (8) è identicamente nulla: con che l'arco di queste linee intercetto fra due punti abbastanza vicini P, P', sarà minimo fra gli archi delle linee del complesso che congiungono P con P'.

Posto per brevità

$$\frac{d\,x_r}{d\,t} = x'_r\,,$$

$$s'^2_h = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s\,, \tag{9}$$

la (8) si scrive:

$$s_h = \int_{t_0}^{t} s'_h\, d\,t.$$

Dando alle x_r una variazione $\delta\, x_r$ sul complesso, la corrispondente variazione di s_h sarà

$$\delta\, s_h = \int_{t_0}^{t} \delta\, s'_h\, d\,t\,, \tag{10}$$

dove, dalla (9) $\left(\text{ricordando } \lambda_h^{(r)} = \frac{x'_r}{s'_h}\right)$

$$\delta\, s'_h = \Sigma_r\, \delta\, x'_r\, \lambda_{h/r} + s'_h\, \Sigma_{rst}\, a_{rs,t}\, \delta\, x_r\, \lambda_h^{(s)}\, \lambda_h^{(t)}\,.$$

Ma con una integrazione per parti, ricordando che le δx_r sono nulle ai limiti t_0, t, dell'integrale, avremo

$$\int_{t_0}^{t} \delta\, x'_r\, \lambda_{h/r}\, d\,t = -\int_{t_0}^{t} \delta\, x_r\, \Sigma_s \frac{d\,\lambda_{h/r}}{d\,x_s}\, \lambda_h^{(s)}\, s'_h\, d\,t,$$

per cui la (10) assume la forma

$$\delta s_h = -\int_{t_0}^{t} s'_h \, d\, t \, \Sigma_{rs} \, \delta x_r \, \lambda_h^{(s)} \, \lambda_{h/rs} = -\int_{t_0}^{t} s'_h \, d\, t \, \Sigma_k \, \gamma_{hkh} \, \Sigma_r \, \lambda_{k/r} \, \delta x_r \, ,$$

ma, poichè la variazione δx_r è sul complesso, cioè

$$\Sigma_r \, \delta x_r \, \lambda_r = 0, \tag{11}$$

la (10) si scrive definitivamente:

$$\delta s_h = -\int_{t_0}^{t} \gamma_{hkh} \, \Sigma_r \, \lambda_{k/r} \, \delta x_r \, s'_h \, d\, t, \quad k \neq h, \; 3,$$

e perchè questa si annulli identicamente,

$$\gamma_{hkh} = 0.$$

Dunque « Le geodetiche dei complessi sono linee di curvatura tangen- « ziale nulla ».

Possiamo qui incidentalmente ricavare le condizioni perchè una qualsiasi λ_h, sia *geodetica della nostra varietà*. Basterà infatti che la variazione prima della (8) si annulli identicamente, prescindendo dalla (11): sia cioè

$$\Sigma_s \, \lambda_{h/rs} \, \lambda_h^{(s)} = 0.$$

5. Per la nota osservazione del Poincaré, potremo in ogni punto P condurre la binormale e la normale principale della linea, passante per P, della nostra congruenza, considerata come linea (in un intorno di P) dello spazio piano tangente in P alla varietà V_3. Queste linee riusciranno perciò tangenti alla V_3, e inviluppperanno su di essa due congruenze che diremo rispettivamente *binormale in* V_3, *e normale principale in* V_3.

Perchè una λ_h sia la congruenza binormale alla λ, essa dovrà in ogni punto P essere normale alle tangenti alla λ in P e in P' ($\overline{PP'} = d\,s$); ossia, assumendo una μ che si muova parallelamente a se stessa per uno spostamento $d\,s$, e tangente in P alla λ, dovrà l'angolo $\widehat{\mu \, \lambda_h}$ rimanere invariato per lo spostamento $d\,s$.

Posto:

$$\Sigma_r \, \mu^{(r)} \, \lambda_{h/r} = \cos \widehat{\mu \, \lambda_h} \, ,$$

derivando, per le (2) ($\nu = \lambda$),

$$\Sigma_{rs} \lambda_{h|rs} \mu^{(r)} \lambda^{(s)} = 0,$$

e in P, essendo $\mu_r = \lambda_r$,

$$\gamma_{h33} = 0.$$

Questa adunque è l'equazione caratteristica delle λ_h binormali, e per la nota proprietà delle normali principali, essa è anche caratteristica delle λ_k ($k \neq 3, h$) normali principali.

6. Chiameremo *flessione geodetica* o *prima curvatura geodetica* di una λ, il rapporto tra l'angolo di due normali principali alla λ in due punti vicinissimi, e l'arco di λ intercetto fra questi due punti.

In altri termini essa è la curvatura normale della λ sul complesso λ_1 ortogonale alla normale principale. Dai risultamenti del paragrafo 2, con una conveniente rotazione d'indici, indicando con c la prima curvatura,

$$c = \gamma_{133} \quad \gamma_{323} = 0 \quad (\lambda_1 \text{ norm. princ.}).$$

Queste equivalgono evidentemente alla

$$c^2 = \gamma_{313}^2 + \gamma_{323}^2 = - \Sigma_{rst} \lambda_{rst} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)}, \tag{12}$$

che è indipendente dalla normale principale.

Osserviamo che le geodetiche della varietà hanno la prima curvatura geodetica nulla.

Poniamo ora

$$\Sigma_r \lambda^{(r)} \mu_r = \cos \alpha ;$$

mediante due derivazioni rispetto ad x_r e ad x_t, moltiplicando per $\lambda^{(s)} \lambda^{(t)}$ e sommando, otteniamo

$$\Sigma_{rst} \lambda_{rst} \mu^{(r)} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} + \Sigma_{rst} \mu_{rst} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} + \Sigma_{rst} \mu_{rs} \lambda_{ut} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} a^{(ru)} +$$
$$+ \Sigma_{rst} \lambda_{rs} \mu_{ut} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} a^{(ru)} = - \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 - \operatorname{sen} \alpha \, \Sigma_{st} \alpha_{st} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)}.$$

Se supponiamo la μ geodetica di V_3 ($\Sigma_s \mu_{rs} \mu^{(s)} = 0$) e tangente alla λ nel punto che si considera ($\lambda_r = \mu_r$, $\alpha = 0$), la nostra equazione diventa:

$$\Sigma_{rst} \lambda_{rst} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} = - \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2,$$

che mostra come c misuri l'allontanarsi della λ dalla geodetica tangente, e giustifica il nome di curvatura geodetica.

Abbiamo poi in generale per γ_{313}, γ_{323} le espressioni:

$$\gamma_{313} = c \cos \sigma, \quad \gamma_{323} = c \operatorname{sen} \sigma,$$

dove σ è l'angolo che la λ_1 fa colla normale principale. Dunque se rappresentiamo in ogni punto la prima curvatura con un vettore di lunghezza c e tangente alla congruenza normale principale, le γ_{313}, γ_{323} sono le lunghezze delle componenti di (c) nella direzione λ_1, λ_2.

Diremo anche *torsione in* V_3 o *seconda curvatura geodetica* della λ il rapporto tra l'angolo di due piani osculatori in due punti vicinissimi alla λ, e l'arco ds intercetto fra questi punti.

Essa adunque è la rotazione della binormale intorno alla λ per uno spostamento elementare.

Con una conveniente rotazione degli indici, dal § 2 abbiamo:

$$\tau = \gamma_{123} \quad \gamma_{313} = 0,$$

a cui equivale per le (α_1), (α_4) dell'Introduzione, la

$$\tau = \gamma_{123} + \frac{1}{c^2}\left(\gamma_{313}\frac{d\gamma_{323}}{ds} - \gamma_{323}\frac{d\gamma_{313}}{ds}\right), \qquad (13)$$

oppure

$$\tau = \gamma_{123} + \frac{\gamma_{323}^2}{c^2}\frac{d}{ds}\frac{\gamma_{313}}{\gamma_{323}},$$

che per le (12) (quando non sia $c = 0$) assume la forma

$$\tau = \gamma_{123} + \frac{d\sigma}{ds}.$$

Le (13) sono indipendenti dalla congruenza binormale, come si vede dall'espressione equivalente:

$$c^2\tau = \Sigma_{rstu}\, \varepsilon^{(rst)} P_{ru} P_t \lambda_s \lambda^{(u)},$$

dove abbiamo posto

$$P_r = \Sigma_s \lambda_{rs} \lambda^{(s)}.$$

7. Se dalle (13) ricaviamo il valore di τ_1, torsione in V_3 della λ_1, abbiamo

$$\tau_1 = -\gamma_{321} + \frac{1}{c_1^2}\left(\gamma_{121}\frac{d\gamma_{131}}{ds_1} - \gamma_{131}\frac{d\gamma_{121}}{ds_1}\right).$$

Chiameremo, analogamente a ciò che si suole sulle superfici, *torsione geodetica sul complesso* o in breve, quando non avvenga ambiguità, *torsione geodetica* di una linea di un complesso, la torsione della geodetica del complesso, tangente alla linea stessa.

Dalla formola testè scritta, la torsione di una λ'_1 geodetica del cómplesso λ $(\gamma'_{311} = 0)$ è:

$$\tau'_1 = -\gamma'_{321}.$$

Ma tutte le congruenze λ_1, μ_1, ecc. di un complesso tangenti in un punto hanno comuni in quel punto i valori degli invarianti γ_{3hk} $(h, k \neq 3)$ (avendo comuni i valori di $\lambda_{1/r}$, $\mu_{1/r}$ ecc., e i valori di $\lambda_{2/r}$, $\mu_{2/r}$, ecc.). Sarà:

$$\tau'_1 = -\gamma_{321}.$$

Quindi « la rotazione elementare di una λ attorno ad una sua traiettoria ortogonale, è uguale alla torsione geodetica di questa sul complesso λ ».

Il teorema contenuto nella (4) (§ 2) si enuncia dunque così:

« La somma delle torsioni geodetiche di due congruenze ortogonali di « un complesso, è costante intorno ad un punto. » All'invariante A daremo il nome di *torsione geodetica media* (brevemente *torsione media*) del complesso λ. Le linee ortogonali canoniche restano allora definite come linee di torsione geodetica media.

Dalle espressioni di A_1, A_2 (torsioni medie dei complessi λ_1, λ_2):

$$2\,A_1 = \gamma_{123} - \gamma_{132}$$

$$2\,A_2 = \gamma_{231} - \gamma_{213},$$

abbiamo:

$$2\,(A_1 - A_2) = \gamma_{312} + \gamma_{321},$$

quindi « I complessi ortogonali alle congruenze ortogonali canoniche hanno egual torsione media ».

Questa proprietà è per essi caratteristica.

CAPITOLO II.

8. Chiameremo *linee di curvatura* di un complesso quelle lungo cui le normali al complesso generano una rigata sviluppabile. Se nell'intorno di un punto sostituiamo alla congruenza curvilinea λ quella l delle sue tangenti, le linee di curvatura della λ giacciono sulle sviluppabili della l.

Ricordando il significato cinematico degli invarianti $-\gamma_{321}$, γ_{312} (§ 2), perchè una λ_1 sia linea di curvatura, dovrà essere $\gamma_{321} = 0$, cioè « Le linee di « curvatura sono linee di torsione geodetica nulla ».

Possiamo però far questa ricerca anche per altra via.

Le equazioni della normale ad un complesso λ, in un punto P sono:

$$Y_h - y_h + \rho\,\xi_h = 0 \qquad h = 1,\ 2, \ldots\ n,$$

in cui le Y_h sono le coordinate correnti della retta (cartesiane ortogonali dello spazio piano Σ_n), y_h quelle di P, e

$$\xi_h = \Sigma_r\, y_{h/r}\, \lambda^{(r)},$$

i coseni di direzione (rispetto agli assi delle y_h) della λ.

Le equazioni della normale nel punto P' ($\overline{PP'} = d\,s_1$) saranno (indicando con δ una variazione lungo la λ_1):

$$Y_h - y_h - \delta\, y_h + \rho\,\xi_h + \delta\,\rho\,\xi_h + \rho\,\delta\,\xi_h = 0,$$

e perchè queste due normali si incontrino:

$$\delta\, y_h = \delta\,\rho\,\xi_h + \rho\,\delta\,\xi_h\,,$$

o le equivalenti (moltiplicando per $y_{h/t}$ e sommando rispetto ad h),

$$\lambda_{1/t} = \frac{d\rho}{d\,s_1}\lambda_t + \rho\,\Sigma_s\,\lambda_{ts}\,\lambda_1^{(s)},$$

che danno:

$$\gamma_{321} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d\rho}{d\,s_1} = 0$$

$$\gamma_{311} = \frac{1}{\rho} = \omega.$$

La prima definisce le linee di curvatura; la seconda ci dice che ρ non varia per uno spostamento lungo la λ_1 (esso è cioè il suo raggio di curvatura; l'altra, in cui abbiamo posto $\omega = \frac{1}{\rho}$, ci dà la curvatura della λ_1 che diremo *curvatura principale.*

Abbiamo dunque la definizione: « Le curvature principali di un complesso, sono le curvature normali delle sue linee di curvatura. »

Dalla (1), con una conveniente rotazione d'indici, abbiamo che perchè una λ risulti di linee di curvatura per un complesso λ_2, dovrà essere

$$\gamma_{123} = 0,$$

e ricordando che la prima delle (α_4) dell'Introduzione, per $\alpha = \text{cost.}$, dà

$$\gamma'_{123} = \gamma_{123},$$

ne ricaviamo che « Tra gli infiniti complessi cui una congruenza appar-« tiene, se essa è di linee di curvatura per uno, è tale anche per ogni altro « che incontri quello sotto angolo costante. »

Scriviamo ora le torsioni medie di tre complessi ortogonali fra loro λ_1, λ_2, $\lambda \equiv \lambda_3$. Sarà $(A \equiv A_3)$

$$2\, A_h = \gamma_{h\,h+1\,h+2} - \gamma_{h\,h+2\,h+1}. \tag{2}$$

Se la λ risulta di linee di curvatura pel complesso λ_2, e quindi pel λ_1, $(\gamma_{123} = 0)$ dalle (2):

$$A = A_1 + A_2.$$

In questa è un'importante generalizzazione di un teorema del Dupin, completato dal Darboux (*), che potremo esprimere così:

« Se due complessi si tagliano ortogonalmente lungo una congruenza di « linee di curvatura, la torsione media del complesso ortogonale a questa è « uguale alla somma delle torsioni medie di complessi dati. »

9. Sia una generica λ'_1 sul complesso λ. Perchè essa risulti di linee di curvatura dovrà essere

$$\gamma'_{321} = 0, \tag{3}$$

che per le (α_3) dell'Introduzione è una equazione di 2.° grado in $\operatorname{tg} \alpha$.

Vediamo così che le linee di curvatura di un complesso sono due in ogni punto.

La (3) supponendo la λ_1 bisettrice delle ortogonali canoniche, dà

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{\gamma_{321}}{\gamma_{312}}},$$

leggiamo in essa che: « Le linee di curvatura e le ortogonali canoniche « hanno le stesse bisettrici. »

La

$$\gamma'_{311} = \omega,$$

corrispondentemente ai due valori di $\operatorname{tg} \alpha$ dati dalle (3), dà per ω due valori ω_1, ω_2, e supponendo ancora λ_1 bisettrice delle ortogonali canoniche, in-

(*) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. II, pag. 263.

dicando indifferentemente ω_1, ω_2, con ω, dà:

$$\omega = H \pm \sqrt{\gamma_{312}\, \gamma_{321}} \,. \tag{4}$$

Possiamo intanto osservare che le due curvature principali, o sono ambedue reali, o sono complesse coniugate; dal che risulta che la loro somma e il loro prodotto (per λ_r reale) sono sempre reali.

Dalle (4) abbiamo per la somma

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\, H, \tag{5}$$

cioè: « La curvatura media di un complesso è uguale alla media aritmetica « delle curvature principali ».

Dalle (5), ove sia

$$\gamma_{321} = 0 \qquad \gamma_{311} = \omega_1 \,,$$

sarà

$$\gamma_{322} = \omega_2 \,.$$

Chiamando curvatura totale e indicando con K il prodotto delle curvature principali, le equazioni testè scritte equivalgono alla

$$K = \gamma_{311}\, \gamma_{322} - \gamma_{312}\, \gamma_{321} = \frac{1}{2}\, \Sigma_{rs}\, \Lambda^{(rs)}\, a_{rs} \,, \tag{6}$$

espressione indipendente delle linee di curvatura. (Gli elementi

$$\Lambda^{(rs)} = 2\, \lambda^{(r)}\, \Sigma_h\, \lambda_h^{(s)}\, (\gamma_{31h+1}\, \gamma_{32h+2} - \gamma_{31h+2}\, \gamma_{32h+1}),$$

sono i complementi algebrici divisi per a, degli elementi λ_{rs} nel determinante (nullo) $[\lambda_{11}\, \lambda_{22}\, \lambda_{33}]$).

Conoscendo ora le espressioni di H e K, possiamo osservare che le curvature principali devono sodisfare l'equazione

$$\omega^2 - 2\, H\, \omega + K = 0, \tag{7}$$

da cui:

$$\omega = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{7$_1$}$$

10. Determiniamo ora la massima e la minima curvatura normale di un complesso. Dalle (α_2) dell'Introduzione, per derivazione rispetto ad α,

$$\frac{d\gamma'_{311}}{d\alpha} = -2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, (\gamma_{311} - \gamma_{322}) + (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\, (\gamma_{312} + \gamma_{321}) = 0,$$

da cui, supponendo la λ_1 bisettrice delle ortogonali canoniche,

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} \,.$$

Dunque le curvature massime e minime di un complesso corrispondono alle linee ortogonali canoniche. Noi le chiameremo *curvature canoniche* (C_1, C_2).

Posto adunque

$$\gamma_{312} = -\gamma_{321} = A, \tag{8}$$

sarà

$$C_1 + C_2 = 2H,$$

$$C_1 C_2 = K - A^2;$$

potremo scrivere:

$$C^2 - 2HC + K - A^2 = 0, \tag{9}$$

e

$$C = H \pm \sqrt{A^2 + H^2 - K}. \tag{9$_1$}$$

Vediamo intanto che, poi che le linee ortogonali canoniche sono sempre reali, e reali quindi le curvature canoniche, dovrà sempre essere:

$$A^2 + H^2 - K \geqq 0.$$

Sempre nell'ipotesi (8), le (α_2) dell'Introduzione assumono la forma

$$\gamma'_{311} = C_1 \cos^2 \alpha + C_2 \operatorname{sen}^2 \alpha;$$

essa è dovuta, nel caso delle superfici, ad EULERO.

Ponendo

$$\gamma'_{311} = \pm \frac{1}{\rho^2},$$

ρ è il semidiametro (inclinato, sugli assi, dell'angolo α) della ellissi:

$$x^2 C_1 + y^2 C_2 = 1, \tag{D}$$

o delle iperboli coniugate:

$$x^2 C_1 + y^2 C_2 = \pm 1, \tag{D'}$$

secondo che C_1 e C_2 sono dello stesso segno o di segno contrario.

Noi assumeremo le (D), (D') cogli assi tangenti alle linee ortogonali canoniche, con che « I quadrati dei loro semidiametri sono eguali all'inversa (in valore assoluto) della curvatura normale delle linee del complesso ad essi tangenti ».

Diremo (D) o (D') *indicatrici di curvatura* (o brevemente *indicatrici*) del complesso. Esse per la (9_1) assumono rispettivamente la forma:

$$H(x^2+y^2)+\sqrt{A^2+H^2-K}\,(x^2-y^2)=1, \qquad (D_1)$$

$$H(x^2+y^2)+\sqrt{A^2+H^2-K}\,(x^2-y^2)=\pm 1. \qquad (D'_1)$$

11. Analogamente, dalle (α_3) dell'Introduzione, derivando rispetto ad α, e supponendo le λ_1 ortogonali canoniche, avremo:

$$\alpha=\pm\frac{\pi}{4},$$

quindi « I valori massimi e minimi delle torsioni geodetiche, corrispondono « alle bisettrici delle ortogonali canoniche ». Indicandoli con t_1, t_2, posto:

$$\gamma_{311}=\gamma_{322}=0 \qquad (10)$$

sarà

$$t_1+t_2=\gamma_{312}-\gamma_{321}=2A$$
$$t_1t_2=K-H^2$$

e t_1, t_2, saranno radici della

$$t^2-2At+K-H^2=0;$$

quindi

$$t=A\pm\sqrt{A^2+H^2-K}. \qquad (11)$$

Nell'ipotesi (10) le (α_3) assumono la forma

$$-\gamma'_{321}=t_1\cos^2\alpha+t_2\,\text{sen}^2\alpha.$$

La ellissi

$$x^2t_1+y^2t_2=1 \qquad (\Delta)$$

o le iperboli

$$x^2t_1+y^2t_2=\pm 1 \qquad (\Delta')$$

cogli assi tangenti alle bisettrici delle ortogonali canoniche, si diranno *indicatrici di torsione* del complesso. Possiamo dar loro la forma

$$A(x^2+y^2)+\sqrt{A^2+H^2-K}\,(x^2-y^2)=1 \qquad (\Delta_1)$$

$$A(x^2+y^2)+\sqrt{A^2+H^2-K}\,(x^2-y^2)=\pm 1. \qquad (\Delta'_1)$$

Abbiamo il teorema:

« Le linee di curvatura di un complesso sono tangenti in ogni punto agli « asintoti della indicatrice di torsione relativa a quel punto. »

Dalle (9_1), (11) abbiamo anche che « La differenza massima in valore as- « soluto delle torsioni geodetiche delle linee di un complesso, è uguale al « valore assoluto della differenza delle curvature canoniche ».

12. Abbiamo studiato le linee (linee di curvatura) definite dalla proprietà che per due loro punti vicinissimi passa un piano che è normale in ambedue al complesso. Studieremo analogamente le linee che in due loro punti vicinissimi ammettono un medesimo piano tangente, tangente al complesso. Esse, nel caso delle superfici sono note col nome di *asintotiche.*

Evidentemente, poi che il piano tangente ad esse e al complesso, è il loro piano osculatore, esse sono caratterizzate dal fatto che la λ è ad esse binormale: la loro equazione sarà adunque (per una λ_h)

$$\gamma_{3hh} = 0. \tag{12}$$

Se poniamo

$$\rho = \sqrt{\pm \frac{1}{\gamma_{3hh}}}$$

vediamo che il semidiametro ρ dell'indicatrice (D_1) corrispondente alla λ_h, ha la direzione dell'asintoto dell'indicatrice stessa; quindi la direzione della nostra λ_h coincide in ogni punto colla direzione dell'asintoto dell'indicatrice relativa a quel punto. Questa proprietà giustifica il nome che noi daremo loro in generale. Leggiamo nella (12): « Le linee asintotiche sono linee di « curvatura normale nulla. »

Dalla

$$\gamma'_{311} = 0 \tag{12$_1$}$$

che per le (α_2) dell'Introduzione è di 2.° grado in tg α, abbiamo che le asintotiche sono in ogni punto due, come del resto si vedeva dal loro significato geometrico.

La (12_1), supponendo le λ_1, λ_2 ortogonali canoniche, dà

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{-\frac{C_1}{C_2}} \tag{12$_2$}$$

quindi « le linee ortogonali canoniche bisecano in ogni punto l'angolo delle « asintotiche ».

Ricaviamo per una λ_h asintotica, l'espressione della torsione in V_3.

Sarà

$$\tau_h = \gamma_{h+1h+2h} \tag{13}$$

dunque « oltre alle geodetiche del complesso, anche le asintotiche hanno la « torsione in V_3, eguale alla torsione geodetica sul complesso ».

Dalle espressioni di K ed A, ricordando le (12), (13) abbiamo

$$\tau_h^2 - 2\,A\,\tau_h + K = 0$$

da cui

$$\tau_h = A \pm \sqrt{A^2 - K} \tag{14}$$

(questa vale anche per le traiettorie ortogonali delle asintotiche). In essa è la naturale estensione del teorema dell'Enneper, relativo alle superfici.

CAPITOLO III.

13. Ripigliando l'equazione di una linea di curvatura λ'_1

$$\gamma'_{321} = 0 \tag{1}$$

se supponiamo anche la λ_1 linea di curvatura, supponiamo cioè sodisfatte le

$$\gamma_{321} = 0, \quad \gamma_{312} = 2\,A, \quad \gamma_{311} - \gamma_{322} = \omega_1 - \omega_2 = \pm\, 2\sqrt{H^2 - K}$$

ricaveremo per l'angolo di queste linee

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{H^2 - K}{A^2}\,. \tag{2}$$

Ricordando che le linee di curvatura hanno la bisettrice reale, o più brevemente che $H^2 - K$ è il discriminante della (1), abbiamo che, affinchè le linee di curvatura siano in un punto reali distinte, reali coincidenti, o imaginarie è necessario e basta che (escluso il caso $A = 0$) il quadrato della curvatura media sia maggiore, uguale, o minore della curvatura totale, intendendo queste espressioni definite dalle (5) del Cap. I e (6) del Cap. II, indipendentemente dal concetto geometrico.

Se, come faremo in generale, supponiamo che la $H^2 - K$ sia funzione finita e continua dell'arco s della λ, le

$$H \pm \sqrt{K} = 0$$

ci definiscono due punti, limitanti l'arco di λ lungo cui sono reali le linee di curvatura. Essi segnano il passaggio dalla realtà all'imaginarietà di queste linee: noi daremo loro il nome di *punti estremi*. Come si legge nelle (2) e ricordando un teorema del § 9, « In essi le linee di curvatura sono coinci-

« denti, e tangenti alle linee bisettrici delle ortogonali canoniche; e le cur- « vature principali pure coincidono ».

Vediamo che i complessi di curvatura totale negativa hanno i punti estremi imaginari.

Qui aggiungeremo che in un intorno di un punto estremo la congruenza delle tangenti ha i fuochi coincidenti.

14. Prendiamo analogamente in esame i punti che limitano l'arco di λ lungo cui sono reali le asintotiche.

Dalla

$$\gamma'_{311} = 0 \tag{3}$$

il cui discriminante è $A^2 - K$, che supporremo funzione finita e continua dell'arco s delle λ, ricaviamo che « Le asintotiche di un complesso sono reali « distinte, reali coincidenti, o imaginarie, secondo che il quadrato della tor- « sione media è maggiore, uguale o minore della curvatura totale » ed anche, ricordando la (12_2) del § 12, « reali o imaginarie secondo che le curvature « canoniche sono di segno opposto od eguale; reali coincidenti se una delle « due è nulla ».

L'equazione adunque dei punti considerati è

$$C_h = 0 \qquad h = 1,\ 2 \tag{4}$$

o l'equivalente

$$A^2 - K = 0. \tag{4_1}$$

Il prof. Levi-Civita nella sua Nota: *Sulle congruenze di curve*, ha dato per le ascisse α_1, α_2 dei punti limiti della congruenza delle tangenti nell'intorno di un punto di una congruenza curvilinea, delle espressioni che potremo scrivere

$$\alpha_h = \frac{C_h}{K};$$

per questa la (4) ci dice che in ciascuno dei punti che abbiamo considerato la congruenza delle tangenti ha un suo punto limite. Noi chiameremo perciò questi punti *punti limiti.*

Ricordando che le asintotiche sono bisecate dalle ortogonali canoniche, abbiamo che « Le asintotiche nei punti limiti sono tangenti fra loro e tan- « genti alle ortogonali canoniche ».

Dalla (4_1) vediamo che come i punti estremi, così i punti limiti sono imaginari per K negativo.

Se nella (3) facciamo λ_1 asintotica, per l'angolo delle asintotiche abbiamo

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{A^2 - K}{H^2} \tag{5}$$

15. Dopo lo studio dei punti in cui coincidono le linee di curvatura o le asintotiche, trova naturalmente posto in queste nostre ricerche la considerazione dei punti in cui un'asintotica coincide con una linea di curvatura. (In tal caso evidentemente l'altra asintotica e l'altra linea di curvatura sono ortogonali.)

Una tal λ_1, nel punto considerato P, sodisfa alle

$$\gamma_{321} = 0\,, \qquad \gamma_{311} = 0 \tag{6}$$

cioè le tangenti alla λ in P e nel punto vicinissimo a P sulla λ_1, sono parallele.

Le (6) danno $\omega_1 = 0$, perciò

$$\left.\begin{aligned} 2H &= \omega_2 \\ K &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Quest'ultima è l'equazione caratteristica dei nostri punti, punti che perciò chiameremo *di curvatura totale nulla.*

16. Diremo infine *punti circolari* quelli in cui le indicatrici di curvatura e di torsione si riducono a circoli. La loro equazione è

$$A^2 + H^2 - K = 0. \tag{8}$$

Parleremo di questi più diffusamente studiando una particolare classe di congruenze coi punti circolari.

Qui naturalmente dovrebbe trovar luogo la considerazione dei punti in cui cade un fuoco delle congruenze delle tangenti, punti che potremmo chiamar *focali.* Ma in tali punti la validità delle nostre formole vien meno.

Infatti (dal § 8) dovremmo avere

$$\rho_h = \frac{\omega_h}{K} = 0$$

equazione indeterminata.

In ciò si rispecchia esattamente il fatto che per il nostro concetto di congruenza, sistema di linee tali che per ogni punto passa una ed una sola linea del sistema (λ_r univalenti), i fuochi sono punti singolari.

17. Vediamo ora come si comportano in tutti questi punti le asintotiche. Nei punti estremi l'angolo delle asintotiche è dato da

$$\cos^2 \alpha = \frac{H^2}{A^2},$$

nei punti di curvatura totale nulla

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{A^2}{H^2},$$

nei punti circolari esse sono imaginarie.

Nei punti limiti infine abbiamo

$$\operatorname{tg} \alpha = 0$$

cioè $\alpha' = 0$, $\alpha'' = \pi$.

Ricordando che le asintotiche hanno sempre per bisettrici le ortogonali canoniche, possiamo concludere (considerando α funzioni finite e continue dell'arco s) che mentre un punto P percorre il segmento dei punti limiti, le direzioni asintotiche si staccano da una linea di una congruenza ortogonale canonica per venire a sovrapporsi di nuovo lungo una linea dell'altra congruenza ortogonale canonica, allontanandosi così fra loro di un angolo eguale a π. Il punto in cui la distanza angolare delle asintotiche è media $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$, diremo *punto medio*: in esso è

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{A^2 - K}{H^2} = \infty$$

da cui

$$H = 0. \tag{9}$$

Se ricordiamo l'espressione delle ascisse dei fuochi e dei punti limiti sulle tangenti (V. Levi-Civita, Nota cit.)

$$\rho_h = \frac{\omega_h}{K}; \quad \alpha_h = \frac{C_h}{K}$$

la (9) dà

$$\rho_1 + \rho_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

cioè « Nel punto medio di una congruenza è il punto medio della congruenza « delle tangenti ».

Nella (9) leggiamo anche: « I punti medi di una congruenza sono punti « di curvatura media nulla. »

Chiameremo rispettivamente *superfice estrema*, *limite*, *media* i luoghi dei punti estremi, dei punti limiti e dei punti medi.

CAPITOLO IV.

18. Sopra un complesso diremo *associata* ad una λ_1, quella congruenza (λ'_1) la cui tangente coincide in ogni punto coll'intersezione dei piani tangenti al complesso in quel punto e in uno vicinissimo della λ_1 stessa.

Adunque la λ'_1 deve essere ortogonale alla λ in due punti vicinissimi della λ_1: essa quindi sarà parallela alla linea di minima distanza fra le tangenti alla λ nei due punti della λ_1.

Assunta una μ sodisfacente alle (2) del Cap. I $(\nu = \lambda_1)$, e in P tangente alla λ'_1 cercata, dovrà essere:

$$\Sigma_r \mu_r \lambda^{(r)} = 0, \qquad \Sigma_{rs} \lambda_{rs} \mu^{(r)} \lambda_1^{(s)} = 0.$$

La prima equivale alla

$$\mu_r = \cos\alpha\, \lambda_{1/r} + \operatorname{sen}\alpha\, \lambda_{2/r},$$

e per questa la seconda si scrive:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\gamma_{311}}{\gamma_{321}}. \tag{1}$$

Abbiamo da questa per le linee di curvatura e per le asintotiche le proprietà caratteristiche:

« Le linee di curvatura sono ortogonali alle loro associate. »

« Le linee asintotiche sono associate a sè stesse. »

Questa proprietà, ricordando la proprietà delle associate, e la definizione di asintotica, ci permette di concludere che « La tangente ad una asintotica « è la linea di minima distanza tra le tangenti alle λ in due punti vicinissimi « dell'asintotica stessa ».

Chiameremo *2.ª associata* di una congruenza, la congruenza associata alla sua associata; *3.ª associata* l'associata dell'associata 2.ª; e così via, *associata* n^{ma} l'associata della sua $(n-1)^{ma}$ associata.

Diremo che un complesso ammette un'associazione d'ordine n, se ogni congruenza del complesso coincide colla sua n^{ma} associata.

19. Calcoliamo la curvatura normale $(\gamma_{311}^{(n)})$ e la torsione geodetica $(-\gamma_{321}^{(n)})$ dell'n^{ma} associata di una λ_1.

Posto per brevità

$$\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2 = P$$

la (1) dà

$$\cos^2\alpha = \frac{\gamma_{321}^2}{P}; \quad \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\gamma_{311}^2}{P}; \quad \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -\frac{\gamma_{311}\gamma_{321}}{P}.$$

Le (α_2), (α_3) dell'Introduzione, porgono allora

$$\gamma'_{311} = \gamma_{311} K \frac{1}{P}, \qquad -\gamma'_{321} = (\gamma_{321} K + 2 A P)\frac{1}{P}. \tag{2}$$

Se indichiamo con P', P'',... $P^{(n-1)}$ le espressioni analoghe a P, e relative alla 1.ª, 2.ª,... $(n-1)^{ma}$ associata della λ_1, e poniamo

$$P \equiv P_1; \qquad P P' = P_2; \qquad P P' P'' = P P'_2 = P_3; \ldots;$$

$$P P' P'' \ldots P^{(n-1)} = P P'_{n-1} = P_n$$

l'espressione cercata di $\gamma_{311}^{(n)}$ è data dalla

$$\gamma_{311}^{(n)} = \gamma_{311}\frac{K^n}{P_n}. \tag{3}$$

Infatti, se supponiamo vera la (3) per un certo valore di n, sarà per le (2)

$$\gamma_{311}^{(n+1)} = \gamma'_{311}\frac{K^n}{P'_n} = \gamma_{311}\frac{K^{n+1}}{P_{n+1}} \qquad (K' \equiv K)$$

cioè essa è vera per il successivo di n; ma è vera per $n = 1$, dunque vale in ogni caso.

Per il $-\gamma_{321}^{(n)}$ abbiamo invece

$$-\gamma_{321}^{(n)} = -\gamma_{321}\frac{(-K)^n}{P_n} + \frac{2A}{P_n}\sum_1^n{}_q P_q(-K)^{n-q}. \tag{4}$$

Essa è vera per $n = 1$ (2.ª delle (2)); per $n + 1$ abbiamo

$$-\gamma_{321}^{(n+1)} = -\gamma'_{321}\frac{(-K)^n}{P'_n} + \frac{2A}{P'_n}\sum_1^n{}_q P'_q(-K)^{n-q}$$

$$= -\gamma_{321}\frac{(-K)^{n+1}}{P_{n+1}} + \frac{2A}{P_{n+1}}(-K)^n P_1 + \frac{2A}{P_{n+1}}\sum_2^{n+1}{}_q P_q(-K)^{n+1-q}$$

cioè è vera in generale.

Or fa d'uopo cercare la formola che dà P_n.

Abbiamo per P_2 dalle (2)

$$P_2 = P P' = P(\gamma'^2_{311} + \gamma'^2_{321}) = 2A^2 P + 4\gamma_{321} K A + K^2 \tag{5}$$

che, scrivendo

$$p_2 = 2\,A, \qquad p_1 = 1$$

si può mettere sotto la forma

$$P_2 = P\,p_2^2 + 2\,\gamma_{321}\,K\,p_2\,p_1 + K^2\,p_1^2\,. \tag{5$_1$}$$

Ora io dico che in generale si ha

$$P_n = P\,p_n^2 + 2\,\gamma_{321}\,K\,p_n\,p_{n-1} + K^2\,p_{n-1}^2 \tag{6}$$

dove i p_q sono funzioni di A e K soltanto.

Invero, supposta valida la (6) per un valore di n, avremo per $n+1$

$$P_{n+1} = P\,P'_n = P\,P'\,p_n^2 + 2\,\gamma'_{321}\,P\,K\,p_n\,p_{n-1} + K^2\,P\,p_{n-1}^2$$
$$= P\,(2\,A\,p_n - K\,p_{n-1})^2 + 2\,\gamma_{321}\,K\,p_n\,(2\,A\,p_n - K\,p_{n-1}) + K^2\,p_n^2$$

e questo, posto

$$p_{n+1} = 2\,A\,p_n - K\,p_{n-1} \tag{7}$$

assume la forma (6). Quindi, ricordando la (5$_1$), la (6) vale in generale.

La (7) insieme colle

$$p_0 = 0; \qquad p_1 = 1 \tag{7$_1$}$$

definisce i p_q, che risultano evidentemente funzioni di A e K soltanto.

20. Cerchiamo ora di dare l'espressione generale di p_r in funzione di A e K.

Se indichiamo con c_{mn} il coefficente (numerico) del termine m^{mo} di p_n, avremo dalle (7$_1$)

$$c_{m0} = 0\,; \quad c_{11} = 1\,, \quad c_{m1} = 0\;(m > 1),$$

a cui aggiungeremo

$$c_{0n} = 0. \tag{8$_1$}$$

L'espressione generale di p_n si potrà scrivere

$$p_n = \sum_{1}^{\frac{n+\varepsilon_n}{2}}{}_m\, c_{mn}\,(2\,A)^{n-2m+1}\,(-K)^{m-1} \tag{9}$$

dove col simbolo ε_n abbiamo indicato lo zero o l'unità, secondo che n è pari

o dispari, abbiamo posto cioè:

$$2\,\varepsilon_n = 1 - (-1)^n.$$

Invero avremo per p_{n+1} (dalle (7))

$$p_{n+1} = \sum_1^{\frac{n+\varepsilon_n}{2}}{}_m\, c_{mn}\,(2\,A)^{n-2m+2}\,(-K)^{m-1} + \sum_1^{\frac{n-1+\varepsilon_{n-1}}{2}}{}_m\, c_{mn-1}\,(2\,A)^{n-2m}\,(-K)^m$$

e cambiando nella seconda sommatoria m in $m-1$, ricordando $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n+1}$, si ha finalmente

$$p_{n+1} = \sum_1^{\frac{n+1+\varepsilon_{n+1}}{2}}{}_m\, (c_{mn} + c_{m-1n-1})\,(2\,A)^{n-2m+2}\,(-K)^{m-1}$$

che è della forma della (9), quando si scriva

$$c_{mn+1} = c_{mn} + c_{m-1n-1}\,.$$

Questa, insieme colle (8), (8_1) ci definisce i c_{mn} che risultano così esclusivamente numerici e positivi.

Prima di procedere innanzi, dimostriamo alcune proprietà dai simboli p_q.

Se supponiamo che per un certo valore di n, valga la

$$p_{n-2}\,p_n = p_{n-1}^2 - K^{n-2} \tag{10}$$

sarà

$$\begin{aligned} p_{n-1}\,p_{n+1} &= (2\,A\,p_n - K\,p_{n-1})\,p_{n-1} \\ &= 2\,A\,p_n\,p_{n-1} - K\,p_n\,p_{n-2} - K^{n-1} \\ &= p_n^2 - K^{n-1} \end{aligned}$$

che è della stessa forma della (10): ma la (10) vale per $n=2$ come si può facilmente verificare, quindi è vero che

$$p_{n-1}\,p_{n+1} = p_n^2 - K^{n-1}. \tag{10_1}$$

Abbiamo inoltre

$$2\,A\sum_1^n{}_q\, p_q^2\,(-K)^{n-q} = p_n\,p_{n+1} \tag{11}$$

e infatti, se essa vale per un valore di n (vale per $n=2$) sarà

$$2\,A\sum_1^{n+1}{}_q\,p_q^2\,(-K)^{n+1-q}=(-K)\,2\,A\sum_1^{n}{}_q\,p_q^2\,(-K)^{n-q}+2\,A\,p_{n+1}^2$$
$$=p_{n+1}\,(2\,A\,p_{n+1}-K\,p_n)=p_{n+1}\,p_{n+2}\,.$$

E dimostriamo infine che

$$2\,A\sum_1^{n}{}_q\,p_q\,p_{q-1}\,(-K)^{n-q}=p_n^2-\varepsilon_n\,K^{n-1}. \tag{12}$$

Per $n+1$ avremo

$$2\,A\sum_1^{n+1}{}_q\,p_q\,p_{q-1}\,(-K)^{n+1-q}=(-K)\,2\,A\sum_1^{n}{}_q\,p_q\,p_{q-1}\,(-K)^{n-q}+2\,A\,p_{n+1}\,p_n$$
$$=p_n\,p_{n+2}+\varepsilon_n\,K^n$$

e per la (10)

$$=p_{n+1}^2-K^n\,(1-\varepsilon_n)$$
$$=p_{n+1}^2-\varepsilon_{n+1}\,K^n.$$

Ma la (12) vale per $n=2$, $n=3$, dunque vale in generale. Essa per n pari assume la forma

$$2\,A\sum_1^{n}{}_q\,p_q\,p_{q-1}\,(-K)^{n-q}=p_n^2$$

e per n dispari

$$2\,A\sum_1^{n}{}_q\,p_q\,p_{q-1}\,(-K)^{n-q}=p_{n-1}\,p_{n+1}\,.$$

21. Veniamo ora al problema delle associazioni di ordine n. Affinchè una λ_1 coincida colla sua associata n^{ma} dovrà essere

$$\gamma_{311}=\gamma_{311}^{(n)} \tag{13}$$
$$\gamma_{321}=\gamma_{321}^{(n)}\,. \tag{14}$$

Convien notare che queste due equazioni ammettono una sola soluzione comune (quella cercata, corrispondente alla linea λ_1) essendo che l'altra coppia di soluzioni corrisponde ad una coppia di linee simmetriche alla λ_1 rispetto agli assi delle indicatrici di curvatura e di torsione, linee che perciò risultano fra loro ortogonali. (Abbiamo escluso implicitamente il caso che le indicatrici si riducano a circoli, perchè le (13) e (14) sarebbero identità.)

La (13), escludendo $\gamma_{311}=0$ (asintotiche) si scrive per le (3)

$$P_n-K^n=0$$

e per la (6)

$$P p_n^2 + 2 \gamma_{321} K p_n p_{n-1} + K^2 (p_{n-1}^2 - K^{n-2}) = 0$$

e infine per la (10), posto

$$P p_n + 2 \gamma_{321} K p_{n-1} + K^2 p_{n-2} = Q_n ,$$

$$p_n Q_n = 0.$$

La (14), per la (4) (ricordando anche $p_0 = 0$) si scrive

$$\gamma_{321} \{ P_n - (-K)^n + 2 K . 2 A \sum_1^n {}_q p_q p_{q-1} (-K)^{n-q} \} +$$

$$+ P . 2 A \sum_1^n {}_q p_q^2 (-K)^{n-q} + K^2 . 2 A \sum_1^{n-1} {}_q p_q^2 (-K)^{n-1-q} = 0$$

e infine per le (6), (11), (12)

$$p_n (\gamma_{321} Q_n + Q_{n+1}) = 0.$$

Perchè le (13), (14) siano sodisfatte simultaneamente, dovrà dunque essere

$$p_n = 0, \tag{15}$$

o $Q_n = Q_{n+1} = 0$. Ma per queste e per le (7) si annullano tutti i Q_m (per $m \geqq 2$). Supposto allora $\gamma_{311} \neq 0$, queste condurrebbero al caso

$$A^2 + H^2 - K = 0$$

e le (13), (14) sarebbero identità.

La (15) adunque è l'unica soluzione del problema, e definisce i complessi che ammettono un'associazione d'ordine n.

Si vede così, osservando che tutti i termini della (9) sono dello stesso segno per $K < 0$, ed escludendo la soluzione indeterminata $A = 0$, $K = 0$, che « I complessi di curvatura totale negativa o nulla non ammettono asso-« ciazioni d'ordine superiore al secondo ».

In ogni altro caso si potrebbe osservare che se $n = h k$, p_n è divisibile per p_h e p_k, come si può agevolmente verificare per n non troppo grande. Del resto è evidente che questa proprietà deve sussistere per il suo significato geometrico. In vero essa significa solo che se l' n^{ma} associata di una linea coincide colla linea stessa, ciò può avvenire perchè l'associata h^{ma} (o k^{ma}) coincide con essa, e ripetendo l'operazione k (o h) volte, giungeremo alla linea primitiva dopo aver costruito $h . k = n$ associate, e toccata la nostra linea di partenza k (o h) volte.

Dunque le vere e proprie associazioni d'ordine n corrispondono ad una

$$p'_n = 0$$

dove p'_n è il quoziente di p_n per tutti i p'_q corrispondenti ai fattori di n. Solo nel caso di n numero primo, la (15) è la vera equazione cercata, avendosi $p_n = p'_n$.

Scriviamo qui una tabella delle equazioni cercate, fino al 6.° ordine

Ordine	Equazioni	Soluzioni escluse
2.°	$A = 0$	
3.°	$4A^2 - K = 0$	
4.°	$2A^2 - K = 0$	$A = 0$
5.°	$16A^4 - 12A^2K + K^2 = 0$	
6.°	$4A^2 - 3K$	$A = 0$; $4A^2 - K = 0$

22. Venendo ora al caso escluso in cui le indicatrici del complesso si riducono a circoli

$$A^2 + H^2 - K = 0 \tag{16}$$

abbiamo

$$\gamma_{311} = H$$
$$-\gamma_{321} = A$$

per qualunque λ_1. L'angolo α che ogni λ_1 fa colla sua associata è allora

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{A}$$

e per la (16)

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{K}}.$$

Poi che α è indipendente dalla λ_1, l'associata n^{ma} della λ_1 farà colla λ_1 stessa l'angolo $n\alpha$; e perchè il nostro complesso ammetta un'associazione di ordine n, dovrà essere

$$\operatorname{sen} n\alpha = 0 \tag{17}$$

dove

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{K}}. \tag{17$_1$}$$

Ora io dico che queste equivalgono in ogni caso alla $p_n = 0$ del caso generale.

Posto infatti

$$q_n = \frac{\operatorname{sen} n \alpha \sqrt{K}^n}{\sqrt{K - A^2}}$$

dalla formola del SIMPSON

$$\operatorname{sen}(n+1)\alpha = 2\cos\alpha \operatorname{sen} n\alpha - \operatorname{sen}(n-1)\alpha$$

abbiamo per la (17_1)

$$q_{n+1} = 2 A q_n - K q_{n-1};$$

ma poi che valgono le

$$q_1 = p_1; \quad q_2 = p_2$$

sarà in generale

$$q_n = p_n.$$

Resta così dimostrato che, esclusi i punti limiti e i punti di curvatura totale nulla le (17), (17_1) equivalgono alla $p_n = 0$.

Queste per K negativo o nullo non ammettono altra soluzione che $A = 0$ (associazione di 2.° ordine); come avevamo asserito per la $p_n = 0$.

Leggiamo nella (17) un importantissimo risultato « Il valore di α dato « dalla (17_1) è il valor medio dell'angolo che le linee di un complesso λ fanno « colle loro associate ».

CAPITOLO V.

23. Diamo ora alcune applicazioni dei nostri risultati generali.

Le *geodetiche* di V_3 sono definite dalla

$$c = 0 \tag{1}$$

cioè sono linee di flessione geodetica nulla: con che abbiamo visto che si annulla identicamente la variazione prima dell'integrale

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma_{rs}\, a_{rs} \frac{d x_r}{d t} \frac{d x_s}{d t}}\, d t.$$

La (1) per due qualunque λ_1, λ'_1 distinte, equivale alle

$$\gamma_{313} = 0; \quad \gamma'_{313} = 0.$$

Dunque in V_3 « sono geodetiche quelle linee che sono geodetiche sopra « due complessi qualunque ».

24. Sappiamo che una congruenza *normale* è definita dalla

$$\lambda_r = \frac{1}{\rho} f_r \quad \left(f_r = \frac{df}{dx_r}; \quad \rho = \Delta_1 f\right).$$

Da questa si traggono le relazioni note

$$A = 0$$

$$\frac{d\nu}{d s_h} = \gamma_{3h3} \qquad (\nu = \log \rho) \tag{2}$$

quindi « le congruenze normali si possono definire come congruenze di tor- « sione media nulla ».

Le (2), se la λ_1 è binormale, danno

$$\frac{d\rho}{d s_1} = 0; \qquad \frac{d\nu}{d s_2} = c$$

la 2.ª ci dà un'espressione della prima curvatura delle traiettorie ortogonali della famiglia di superfici; la prima ci dice invece, che « le famiglie di su- « perfici $f =$ cost., $\Delta_1 f =$ cost., s'intersecano lungo le binormali alle traiettorie « ortogonali della $f =$ cost. ».

Possiamo ricavar l'angolo sotto cui queste famiglie di superfici si incontrano. Posto

$$f_r = \Delta_1 f \lambda_r \qquad (\Delta_1 f)_r = \Delta_1 (\Delta_1 f) \mu_r .$$

Sarà

$$\Sigma_r \lambda^{(r)} \mu_r = \frac{\Sigma_{rs} f_{rs} f^{(r)} f^{(s)}}{(\Delta_1 f)^2 \Delta_1 (\Delta_1 f)} = \cos \alpha. \tag{3}$$

Ricordando i risultati del capitolo precedente, abbiamo che le congruenze normali sono tutte e sole le congruenze che ammettono sui loro complessi ortogonali un'associazione di 2.° ordine. In questa associazione esiste adunque reciprocità; essa è nota col nome di coniugazione, perchè le associate hanno le direzioni dei diametri coniugati dell' indicatrice di curvatura (indicatrice del Dupin).

Nel caso delle congruenze normali, H e K risultano evidentemente in ogni punto, uguali alle curvature media e del Gauss della superfice ortogonale passante per quel punto. Per queste congruenze non esistono punti estremi,

perchè le linee di curvatura sono sempre ortogonali e reali; e i punti limiti coincidono coi fuochi.

Siamo in grado ora di dimostrare, che se una congruenza ammette in un intorno di un punto una superfice ortogonale, è nulla in quel punto la torsione media del complesso ortogonale.

Sia $f = 0$ l'equazione di questa superfice, μ la congruenza ortogonale alle $f =$ cost. Posto

$$\mu_r = \Sigma_h \cos \alpha_h \lambda_{h/r} ,$$

sarà nell'intorno di un punto P della nostra superfice,

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_3 = 0 ; \quad \cos \alpha_3 = 1$$

e, poi che due λ_1, λ_2 giacciono sulla superfice,

$$\frac{d \alpha_h}{d s_k} = 0 \quad (h \text{ e } k = 1, 2).$$

La

$$\Sigma_{rsthk} \cos \alpha_h \cos \alpha_k \lambda_{h/rs} \lambda_{k/t} \varepsilon^{(rst)} - \Sigma_{rsthk} \operatorname{sen} \alpha_h \cos \alpha_k \lambda_{h/r} \alpha_{h/s} \lambda_{k/t} \varepsilon^{(rst)} = 0$$

diventa nell'intorno di P

$$A = 0,$$

come avevamo asserito.

Allora in P le linee di curvatura sóno ortogonali e coincidono con quelle della $f = 0$, e H e K relative alla congruenza λ, sono le curvature media e totale della $f = 0$.

Scende di qua il teorema « Se una congruenza ha la superfice media « ortogonale, questa è una superfice minima ». Questo teorema è interessante perchè mette in correlazione colla teoria delle superfici minime un'importante classe di congruenze. Esso fu dimostrato dal Guichard per una classe particolare di congruenze rettilinee (*).

E abbiamo anche « Se il luogo dei punti di curvatura totale nulla è una « superfice ortogonale alla congruenza, questa superfice è sviluppabile ».

Passando ora alle congruenze *normali geodetiche*, è noto che i loro sistemi coordinati λ_r risultano delle derivate di una λ rispetto alle x_r.

Per esse, dalle (2), vediamo che è sempre, oltre ad

$$f = \lambda = \text{cost.}$$

(*) Guichard, *Sur une classe particulière des congruences de droites.* (Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, 22 giugno 1891).

anche

$$\underset{1}{\Delta}\lambda = 1.$$

Dalle (L_1) dell'Introduzione abbiamo, per λ geodetica

$$2AH + \frac{dA}{ds} = 0 \qquad (4)$$

quindi « se una congruenza geodetica ammette una superfice ortogonale $(A = 0)$ « essa è una congruenza normale ».

25. Si dicono *isoterme* quelle famiglie di superfici di cui un parametro è funzione armonica delle variabili indipendenti, rispetto alla forma fondamentale. Diremo poi il parametro, *parametro isometrico.* Data una congruenza di superfici isoterme λ, se f ne è un parametro isometrico, dovrà, oltre ad $A = 0$, essere

$$\Sigma_{rs}\, a^{(rs)} f_{rs} = 0 \qquad (5)$$

condizione trasformata dal Ricci (*) nell'altra (tenendo conto delle (2))

$$\frac{d\gamma_{313}}{ds_2} - \frac{d\gamma_{323}}{ds_1} + \gamma_{323}\gamma_{212} - \gamma_{313}\gamma_{121} = 0$$

$$\frac{dH}{ds_h} - \frac{d\gamma_{3h3}}{ds_h} + \gamma_{3k3}(\gamma_{kh3} - \gamma_{k3h}) - \gamma_{3h3}\gamma_{3kk} = 0 \qquad (h = 1,\ 2 \quad k \neq h).$$

La prima, dalle (L_1) dell'Introduzione per $A = 0$ è identicamente sodisfatta, le altre, nel caso delle congruenze λ geodetiche, danno, come osservò il Ricci

$$\frac{dH}{ds_h} = 0 \qquad (h = 1,\ 2)$$

e noi siamo in grado di interpretarla così: « Se una famiglia di superfici « isoterme ha le traiettorie ortogonali geodetiche, essa risulta di superfici di « curvatura media costante. » E se la funzione λ definita dalla

$$\frac{d\lambda}{dx_r} = \lambda_r$$

ne è un parametro isometrico, la (5) dà:

$$H = 0$$

e la congruenza risulta di superfici minime.

(*) *Dei sistemi di congruenze ort.*, ecc. Mem. cit.

26. Il Ricci dimostrò (*) che le congruenze che ammettono tra le loro superfici (superfici risultanti da una semplice infinità di linee della congruenza) due famiglie di superfici in ogni punto ortogonali, sono quelle che hanno normali le congruenze ortogonali canoniche.

Infatti, perchè due congruenze ortogonali λ_1, λ_2 siano normali, dovrà essere $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, da cui

$$A_1 = A_2$$

caratteristica (Cap. I) delle ortogonali canoniche.

La

$$A_1^2 + A_2^2 = 0$$

equivalente alle $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, per la $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$ si scrive, indicando con T la torsione geodetica della λ sopra le superfici ortogonali ad una congruenza ortogonale canonica,

$$T + A = 0 \tag{6}$$

che è indipendente dalle λ_1, λ_2.

Se la λ è normale, abbiamo

$$A = A_h$$

cioè la λ è essa pure ortogonale canonica rispetto alle altre due.

Una ricerca più generale sarà quella delle congruenze che risultano ortogonali canoniche rispetto a ciascuna delle loro ortogonali canoniche.

Se λ_1, λ_2 sono ortogonali canoniche rispetto a λ,

$$A_1 = A_2,$$

e perchè λ sia ortogonale canonica rispetto a λ_1,

$$A = A_2$$

cioè

$$A = A_1 = A_2 \tag{7}$$

e la λ sarà canonica anche rispetto alla λ_2.

La (7) equivale alla

$$T = A. \tag{7$_1$}$$

Cioè « affinchè una congruenza sia ortogonale canonica rispetto alle sue « ortogonali canoniche, è necessario e basta che la sua torsione geodetica

(*) Mem. cit.

« sopra uno dei complessi delle ortogonali canoniche, sia uguale alla torsione « media del suo complesso ».

27. Le congruenze di curve che il prof. Levi-Civita (*), con naturale estensione dell'appellativo dato alle congruenze di rette, ha chiamato *isotrope*, sono definite, com'egli ha osservato, dalle

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_{311}-\gamma_{322}=0\\ \gamma_{312}+\gamma_{321}=0\end{array}\right\} \tag{8}$$

queste valgono qualunque sia la λ_1, sicchè per esse ogni linea ortogonale è insieme ortogonale canonica e bisettrice delle ortogonali canoniche. Indicando con α, β, rispettivamente i primi membri delle (8), le (8) stesse equivarranno alla $\alpha^2+\beta^2=0$, cioè

$$A^2+H^2-K=0 \tag{8$_1$}$$

che assumeremo come caratteristica di queste congruenze.

Osservando la forma che per essa assumono le indicatrici di curvatura e di torsione, ricaviamo che « i complessi ortogonali alle congruenze isotrope « hanno i punti circolari »; e « ogni linea del complesso ha la torsione geo- « detica eguale alla media ». Si trae da ciò che per essi le asintotiche sono imaginarie eccetto che nel punto medio in cui ogni linea è asintotica; e che le linee di curvatura sono sempre imaginarie quando non sia $A=0$.

Vediamo dalla (8_1) che i punti limiti coincidono col punto medio, i punti di curvatura totale nulla, ove esistano, sono definiti dalla

$$A^2+H^2=0$$

cioè: « Le congruenze isotrope hanno reali i punti di curvatura totale nulla, « se è zero nel punto medio la torsione media: in tal caso essi coincidono « col punto medio. »

Quanto ai punti estremi, essi sono immaginari (sappiamo che per $A=0$ non esistono punti estremi).

Osserviamo qui che le congruenze isotrope corrispondono al caso trattato nel § 22, quindi ogni linea del complesso ortogonale ad una congruenza isotropa forma colla sua associata l'angolo medio α (sempre reale), definito dalla

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{K}}$$

(*) Levi-Civita, Nota citata.

o dall'equivalente (per le (8_1))

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{H} \cdot$$

Il Levi-Civita ha dimostrato che « ogni congruenza isotropa si può in « infiniti modi riguardare come risultante dalle intersezioni di due famiglie « ortogonali di superfici ».

Infatti, essendo ogni λ_1 ortogonale canonica, sarà

$$A_1 = A_2$$

e quindi avremo la relazione

$$2\, A_1 = A + \gamma_{123}$$

e perchè la λ_1 sia normale

$$A + \gamma_{123} = 0. \tag{9}$$

Ma ogni λ'_1 ortogonale alla λ, e che incontri la λ_1 sotto angolo costante, per le (α_1) dell'Introduzione sodisfa alla (9), quindi « le superfici di una con- « gruenza isotropa si incontrano sotto angolo costante ».

Potremo adunque completare il teorema del Levi-Civita, così:

« Ogni congruenza isotropa si può in infiniti modi riguardare come ge- « nerata dalla intersezione di due famiglie di superfici che si incontrano sotto « angolo costante. »

28. Come abbiamo fatto più volte, e come fece il Levi-Civita per le congruenze isotrope, trasportando il nome dalle congruenze delle tangenti in ogni punto, alla congruenza data, diremo *pseudosferiche* le congruenze che hanno pseudosferica in ogni punto la congruenza delle tangenti. Indicando le ascisse dei fuochi e dei punti limiti di queste, rispettivamente con ρ_1, ρ_2; α_1, α_2, sarà

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 - \rho_2 &= 2\, c \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2\, C. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Le ascisse dei fuochi (inverse delle curvature principali) sono i valori di ρ dati dalla

$$\rho = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - K}}{K};$$

quelle dei punti limiti i valori di α nella

$$\alpha = \frac{H \pm \sqrt{A^2 + H^2 - K}}{K},$$

di modo che le (10) assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} H^2 - K &= c^2 K^2 \\ A^2 + H^2 - \quad &= C^2 K^2. \end{aligned}\right\} \qquad (10_1)$$

Ci limiteremo per queste congruenze, oltre ad averne dato le equazioni caratteristiche (10_1), a notare che queste danno

$$A^2 = K^2 (C^2 - c^2)$$

cioè « La torsione media e la curvatura totale del complesso ortogonale ad « una congruenza pseudosferica, stanno in rapporto costante ».

INDICE

Evaluation nouvelle des intégrales indéfinies et des séries infinies contenant une fonction cylindrique.

(Par Niels Nielsen, *à Copenhague.)*

Le Mémoire que voici est divisé en deux parties inégales. La première partie occupant les deux tiers de tout le Mémoire à peu près est déstinée à étudier une généralisation des fonctions cylindriques, à savoir une fonction $\overset{\mu}{B}(x)$ qui est assujettie à satisfaire aux équations fonctionnelles suivantes:

$$\overset{\mu-1}{B}(x) - \overset{\mu+1}{B}(x) - 2\,D_x\,\overset{\mu}{B}(x) = \frac{2}{x}\,\overset{\mu}{f}(x), \tag{α}$$

$$\overset{\mu-1}{B}(x) + \overset{\mu+1}{B}(x) - \frac{2\,\mu}{x}\,\overset{\mu}{B}(x) = \frac{2}{x}\,\overset{\mu}{g}(x), \tag{β}$$

où $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ sont deux fonctions données de μ et de x qui doivent satisfaire à une certaine condition, nous le verrons dans le § 5.

Une telle fonction $\overset{\mu}{B}(x)$ n'a pas encore été étudiée d'une manière systématique, que je sache; néanmoins, elle joue un rôle assez fondamental dans la théorie des fonctions cylindriques. Voici les applications les plus importantes de cette fonction:

1.° Supposons que $\overset{\mu}{f}(x)$ et $\overset{\mu}{g}(x)$ contiennent toutes les deux un paramètre α, il sera la même chose pour $\overset{\mu}{B}(x)$; intégrant ensuite par rapport à α les formules (α), (β), on obtiendra une nouvelle fonction satisfaisant à deux équations fondamentales de la même forme. Appliquant ce principe, on aura par exemple aisément pour les fonctions cylindriques les expressions à l'aide des intégrales définies données par M. Sonine (*).

(*) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 10 (1880).

2.° Une intégrale indéfinie de la forme

$$\int \overset{\mu}{\omega}(x) \overset{\mu}{C}(x)\, d\,x, \qquad (\gamma)$$

$\overset{\mu}{\omega}(x)$ étant une fonction donnée de μ et de x, tandis que $\overset{\mu}{C}(x)$ désigne une fonction cylindrique quelconque, peut être représentée simplement à l'aide d'une fonction $\overset{\mu}{B}(x)$.

3.° En prenant pour $\overset{\mu}{\omega}(x)$ certaines fonctions simples, les fonctions $\overset{\mu}{B}(x)$ introduites par cette étude de l'intégrale (γ) permettent de déduire immédiatement, en faisant varier une constante, toutes les fonctions désignées habituellement comme les fonctions *besséliennes* de la deuxième espèce et, en outre, un nombre d'autres fonctions complètement analogues qui semblent être nouvelles.

Remarquons que la formule bien connue, exprimant à l'aide des fonctions $\overset{n}{S}(x)$, $\overset{n}{T}(x)$, $\overset{n}{U}(x)$ la fonction cylindrique de la deuxième espèce $\overset{n}{Y}(x)$, se présente immédiatement par ce point de vue; c'est-à-dire que notre développement montre que cette manière de diviser la série infinie obtenue pour $\overset{n}{Y}(x)$ est naturelle. C'est la même chose pour les fonctions nouvelles $\overset{n}{\mathfrak{S}}(x)$, $\overset{n}{\mathfrak{T}}(x)$ introduites dans le § 23.

4.° Les mêmes fonctions $\overset{\mu}{B}(x)$ nous fourniront un simple moyen pour développer en séries selon les fonctions cylindriques l'intégrale (γ); par là on obtiendra tous les développements connus d'une série de puissances.

Parmi les auteurs antérieurs qui ont étudié une intégrale indéfinie de la forme (γ) citons MM. Lommel (*) et Sonine. Dans son excellent Mémoire sur les fonctions cylindriques. M. Sonine (**) généralise les formules assez spéciales obtenues par M. Lommel en regardant les deux intégrales suivantes:

$$\int \left(\frac{d^2 B}{d\,x^2} + \frac{2\mu+1}{x}\frac{d\,B}{d\,x} + B\right) x^{\mu+1} \overset{\mu}{C}(x)\, d\,x, \qquad (\delta)$$

$$\int \sigma(x)\, \overset{\mu}{C}(\varphi(x))\, \overset{\nu}{C_1}(\psi(x))\, d\,x, \qquad (\varepsilon)$$

où $\overset{\mu}{C}$, $\overset{\nu}{C_1}$ désignent deux fonctions cylindriques quelconques, tandis que B,

(*) *Mathematische Annalen*, t. 9 (1876), t. 14 (1879), t. 16 (1880).
(**) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 29-33 (1880).

σ, φ, ψ sont quatre fonctions données de x. Cela posé, l'intégrale (δ) sera égale à

$$x^{\mu+1}\left(B\overset{\mu+1}{C}(x)+\frac{dB}{dx}\overset{\mu}{C}(x)\right),$$

tandis que l'intégrale (ε) ne peut être déterminée par la méthode de M. Sonine qu'à l'aide d'un système très compliqué des équations différentielles. Or, ces difficultés considérables auraient été inutiles si l'éminent géomètre russe avait étudié sa première intégrale d'un autre point de vue, nous le verrons dans le § 12.

La deuxième partie de ce Mémoire est consacrée à une étude systématique des développements d'une série de Laurent selon les fonctions cylindriques obtenus dans la première partie. Quoique un nombre de géomètres se soient occupés des séries en question pendant les trente ans écoulés après leur invention par M. Carl Neumann, la théorie de ces développements et de leurs applications n'a pas encore été profondément étudiée. Néanmoins, par là on peut obtenir d'une manière extrêmement simple et élégante un nombre de propriétés et de formules des fonctions cylindriques, tandis que les démonstrations habituelles sont assez compliquées et différentes.

Citons ici le développement selon les fonctions cylindriques d'une fonction de la forme $f(y-x)$, développement dont les coefficients possèdent des propriétés remarquables. Comme les plus simples de ces coefficients nous obtiendrons les fonctions $\overset{n}{O}(x)$, $\overset{n}{S}(x)$ et les fonctions nouvelles $\overset{n}{\mathfrak{O}}(x)$, $\overset{n}{\mathfrak{S}}(x)$. De même, le développement d'une fonction de la forme $f(xyi)$ nous conduira à une fonction rationnelle de y réprésentant une généralisation très étendue des fonctions sphériques et possédant néanmoins un nombre des propriétés fondamentales de ces dernières fonctions. Le développement d'une série de puissances selon ces fonctions est très remarquable.

C'est ce point de vue qui justifie, ce me semble, l'extension que voici de la brève Note (*) que j'ai publiée en danois il y a un an à peu près.

Il me semble utile de commencer mes recherches en disant quelques mots sur la définition et les propriétés fondamentales des fonctions cylindriques.

(*) *Nyt Tidsskrift for Matematik*, t. 9 (1898).

PREMIÈRE PARTIE.

Généralisations des fonctions cylindriques. Applications.

I. Propriétés fondamentales des fonctions cylindriques.

§ 1. Désignons comme fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre μ une fonction $\overset{\mu}{C}(x)$ qui est assujettie à satisfaire aux deux équations fonctionnelles suivantes:

$$\overset{\mu-1}{C}(x) - \overset{\mu+1}{C}(x) = 2\, D_x \overset{\mu}{C}(x), \tag{α}$$

$$\overset{\mu-1}{C}(x) + \overset{\mu+1}{C}(x) = \frac{2\,\mu}{x} \overset{\mu}{C}(x), \tag{β}$$

mais étant du reste aussi arbitraire que ces conditions le permettent.

Dans un Mémoire que je viens de publier dans ce Journal (*) j'ai fait voir que la solution la plus générale de l'equation (β) peut être donnée sous cette forme

$$\overset{\mu}{F}(x) = \overset{\mu}{a}(x)\, \overset{\mu}{J}(x) + \overset{\mu}{b}(x)\, \overset{\mu}{Y}(x), \tag{1}$$

$\overset{\mu}{a}(x)$ et $\overset{\mu}{b}(x)$, regardées comme fonction de μ, ayant la période additive $+1$ mais étant du reste complètement arbitraires. $\overset{\mu}{J}(x)$ est la fonction cylindrique de la première espèce:

$$\overset{\mu}{J}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s}}{s!\,\Gamma(\mu+s+1)}, \tag{γ}$$

où l'on a posé

$$x^\mu = e^{\mu(\log|x|+i\varphi)}, \quad x = |x|\,.\,e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\,\pi.$$

Dans ce qui suit nous nous servons constamment de cette définition d'une puissance quelconque. $\overset{\mu}{Y}(x)$, au contraire, est la fonction cylindrique de la

(*) *Annali di Matematica*, t. V, p. 29.

deuxième espèce, à savoir:

$$\overset{\mu}{Y}(x) = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\,\overset{\mu}{J}(x) - \overset{-\mu}{J}(x)\right). \qquad (\delta)$$

Remarquons que notre définition de $\overset{\mu}{Y}(x)$ diffère un peu de celles données par Hankel (*) et par Schläfli (**). Or, cette légère modification simplifie notre fonction, ce me semble. Supposant μ égal à l'entier n, on aura l'expression de $\overset{\mu}{Y}(x)$ sons une forme indéterminée. Or, dans ce cas la méthode habituelle donnera

$$\overset{n}{Y}(x) = \left(D_\mu J\overset{\mu}{(x)}\right)_{\mu=n} + (-1)^n\left(D_\mu \overset{\mu}{J}(x)\right)_{\mu=-n}. \qquad (\varepsilon)$$

Posant maintenant

$$\overset{\mu}{\mathfrak{Z}}(x) = D_\mu \overset{\mu}{J}(x) - \overset{\mu}{J}(x)\log\frac{x}{2},$$

on aura

$$\overset{\mu}{\mathfrak{Z}}(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s}}{s!\,\Gamma(\mu+s+1)}\,\psi(\mu+s+1), \qquad (\xi)$$

où l'on a posé

$$\psi(\mu) = D_\mu\log\Gamma(\mu) = -C - \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\mu+s} - \frac{1}{s+1}\right),$$

C désignant la constante d'Euler; supposons n positif entier, la détermination de $\overset{-n}{\mathfrak{Z}}(x)$ peut être effectuée en différentiant par rapport à μ la série obtenue pour $\overset{\mu-n}{J}(x)$, et la formule

$$\frac{1}{\Gamma(\mu-n)} = (-1)^n\,n!\left(\mu - \psi(n+1)\mu^2 \ldots\right)$$

nous donnera immédiatement:

$$\left.\begin{aligned}\overset{-n}{\mathfrak{Z}}(x) = (-1)^n\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} + \\ + (-1)^{n-1}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(n+s)!}\cdot\psi(s+1).\end{aligned}\right\} \qquad (\eta)$$

(*) *Matematische Annalen*, t. 1, p. 472 (1869).
(**) *Matematische Annalen*, t. 3, p. 135 (1871).

Cela posé, la formule de M. Lommel (*).

$$\overset{\mu}{J}(x)\overset{\mu-1}{Y}(x) - \overset{\mu-1}{J}(x)\overset{\mu}{Y}(x) = \frac{2}{x} \qquad (\theta)$$

montrera immédiatement que la fonction $\overset{\mu}{F}(x)$ figurant au premier membre de (1) ne peut satisfaire en même temps à la formule (α) que si $\overset{\mu}{a}(x)$, $\overset{\mu}{b}(x)$ sont indépendantes de x, c'est-à-dire que la fonction cylindrique la plus générale peut être donnée sous cette forme:

$$\overset{\mu}{C}(x) = a(\mu)\overset{\mu}{J}(x) + b(\mu)\overset{\mu}{Y}(x), \quad a(\mu+1) = a(\mu), \quad b(\mu+1) = b(\mu), \qquad (2)$$

de sorte que $\overset{\mu}{C}(x)$ est une solution de l'équation différentielle linéaire *besséllienne*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right)y = 0. \qquad (\iota)$$

Supposant n positif entier, on aura

$$\overset{-n}{C}(x) = (-1)^n \overset{n}{C}(x), \qquad (3)$$

car on verra immédiatement que $\overset{n}{J}(x)$ et $\overset{n}{Y}(x)$ satisfont à cette formule, et dans ce cas $a(n)$, $b(n)$ sont indépendantes de n.

On verra en outre que la fonction $b(\mu).\overset{-\mu}{C}(x)$ sera aussi une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre μ, pourvu que $\overset{\mu}{C}(x)$ le soit et que $b(\mu)$ satisfasse à la condition $b(\mu+1) = -b(\mu)$.

Remarquons que notre définition des fonctions cylindriques n'est pas encore généralement adoptée par les géomètres. Parfois on désigne comme fonction cylindrique une solution quelconque de l'équation différentielle (ι), définition qui est peu avantageuse, ce me semble. En effet, adoptant cette définition, on verra que $\overset{\mu}{J}(x)$ et la fonction cylindrique générale auront des propriétés différentes, tandis que notre définition nous permet de démontrer directement, on le verra plus bas, un nombre de formules et de propriétés de la fonction cylindrique générale $\overset{\mu}{C}(x)$ sans avoir besoin de regarder d'a-

(*) *Mathematische Annalen*, t. 4, p. 108 (1871).

bord $\overset{\mu}{J}(x)$ et ensuite $\overset{\mu}{Y}(x)$, procédé employé souvent dans les recherches antérieures sur les fonctions cylindriques.

§ 2. Regardons maintenant une fonction cylindrique $\overset{\mu}{C}_1(x)$ différente de $\overset{\mu}{C}(x)$ et contenant les fonctions arbitraires $a_1(\mu)$, $b_1(\mu)$, nous aurons, en vertu de (θ) du § 1, la formule analogue générale

$$\overset{\mu}{C}(x)\overset{\mu-1}{C_1}(x) - \overset{\mu-1}{C}(x)\overset{\mu}{C_1}(x) = \frac{2}{x}\Big(a(\mu)\,b_1(\mu) - a_1(\mu)\,b(\mu)\Big) = \frac{2}{x}\cdot\Delta(a,\ b). \quad (4)$$

Dans mon Mémoire cité (*) on trouvera pour la fonction $\overset{\mu}{F}(x)$ figurant au premier membre de (1) les deux formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu+n}{F}(x) &= \overset{\mu-1,n}{R}(x)\,.\,\overset{\mu}{F}(x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\,.\,\overset{\mu-1}{F}(x), \\ (-1)^n\overset{\mu-n}{F}(x) &= \overset{-\mu+1,n}{R}(x)\,.\,\overset{\mu}{F}(x) + \overset{-\mu,n-1}{R}(x)\,.\,\overset{\mu+1}{F}(x), \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

où n désigne un positif entier, tandis que $\overset{\mu,n}{R}(x)$ est une fonction rationnelle de μ et de x, à savoir:

$$\overset{\mu,n}{R}(x) = \sum_{s=0}^{<\frac{n+1}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)\,!}{s\,!}\binom{\mu+n-s}{n-2s}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}.$$

Cela posé, on aura, en vertu de (4), la formule analogue plus générale

$$\overset{\mu+n}{C}(x)\,\overset{\mu}{C_1}(x) - \overset{\mu}{C}(x)\,\overset{\mu+n}{C_1}(x) = \frac{2}{x}\cdot\Delta(a,\ b)\,\overset{\mu,n-1}{R}(x). \quad (5)$$

§ 3. Dans certaines recherches il est nécessaire de différentier par rapport au paramètre la fonction cylindrique $\overset{\mu}{C}(x)$. Posons

$$D_\mu \overset{\mu}{C}(x) = \overset{\mu}{\mathfrak{C}}(x) + \overset{\mu}{C}(x)\log\frac{x}{2},$$

nous verrons immédiatement que la fonction $\overset{\mu}{\mathfrak{C}}(x)$ doit satisfaire aux équations fonctionnelles suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu-1}{\mathfrak{C}}(x) - \overset{\mu+1}{\mathfrak{C}}(x) &= 2\,D_x\,\overset{\mu}{\mathfrak{C}}(x) + \frac{2}{x}\,\overset{\mu}{C}(x), \\ \overset{\mu-1}{\mathfrak{C}}(x) + \overset{\mu+1}{\mathfrak{C}}(x) &= \frac{2\mu}{x}\,\overset{\mu}{\mathfrak{C}}(x) + \frac{2}{x}\,\overset{\mu}{C}(x); \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(*) *Annali di Matematica*, t. V, p. 20.

n étant un entier, la détermination de $\overset{n}{Y}(x)$ a déjà donné la fonction $\overset{\mu}{\mathfrak{Z}}(x)$ qui correspond à $\overset{\mu}{J}(x)$. Pour déterminer la fonction analogue $\overset{\mu}{\mathfrak{Y}}(x)$ il faut multiplier la formule (δ) du § 1 par $\sin\mu\pi$ et différentier ensuite par rapport à μ, ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu}{\mathfrak{Y}}(x) &= \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\,\overset{\mu}{\mathfrak{Z}}(x) + \overset{-\mu}{\mathfrak{Z}}(x)\right) + \\ &+ \frac{2\pi}{\sin\mu\pi}\,\overset{-\mu}{J}(x)\log\frac{x}{2} - \pi^2\,\overset{\mu}{J}(x) - \pi\cot\mu\pi\,\overset{\mu}{Y}(x), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

expression qui n'est plus applicable si l'on suppose le paramètre μ égal à un nombre entier n. Dans ce cas il faut différentier encore une fois, ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} 2\,\overset{n}{\mathfrak{Y}}(x) &= \left(D_\mu^2\,\overset{\mu}{J}(x)\right)_{\mu=n} - (-1)^n\cdot\left(D_\mu^2\,\overset{\mu}{J}(x)\right)_{\mu=-n} - \\ &- \pi^2\,\overset{n}{J}(x) - 2\,\overset{n}{Y}(x)\log\frac{x}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dans cette formule nous avons supposé n positif; nous avons en outre

$$\overset{-n}{\mathfrak{Y}}(x) = (-1)^{n-1}\,\overset{n}{\mathfrak{Y}}(x) + (-1)^{n-1}\cdot 2\,\overset{n}{Y}(x)\log\frac{x}{2} + (-1)^{n-1}\cdot\pi^2\,\overset{n}{J}(x). \tag{8$_a$}$$

Ces formules (8) nous permettent de démontrer la proposition suivante qui est bien remarquable, ce me semble:

La fonction $\overset{\pm n}{\mathfrak{S}}(x)$, *$n$ étant un positif entier, peut être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions cylindriques et des fonctions élémentaires.*

En effet, nous aurons immédiatement, en vertu de (6), (8):

$$\left.\begin{aligned} \overset{0}{\mathfrak{Y}}(x) &= -\,\overset{0}{Y}(x)\log\frac{x}{2} - \frac{\pi^2}{2}\,\overset{0}{J}(x), \\ \overset{1}{\mathfrak{Y}}(x) &= \frac{1}{x}\,\overset{0}{Y}(x) - \overset{1}{Y}(x)\log\frac{x}{2} - \frac{\pi^2}{2}\,\overset{1}{J}(x), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

et de même

$$\left.\begin{aligned} \overset{0}{\mathfrak{Z}}(x) &= -\,\overset{0}{J}(x)\log\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\overset{0}{Y}(x), \\ \overset{1}{\mathfrak{Z}}(x) &= \frac{1}{x}\,\overset{0}{J}(x) - \overset{1}{J}(x)\log\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\overset{1}{Y}(x), \\ \overset{-n}{\mathfrak{Z}}(x) &= (-1)^{n-1}\,\overset{n}{\mathfrak{Z}}(x) + (-1)^{n-1}\cdot 2\,\overset{n}{J}(x)\log\frac{x}{2} + (-1)^n\,\overset{n}{Y}(x). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Cela posé, nous aurons pour $\overset{\mu}{\mathfrak{C}}(x)$ l'expression suivante

$$\overset{\mu}{\mathfrak{C}}(x) = a(\mu)\,\overset{\mu}{\mathfrak{J}}(x) + b(\mu)\,\overset{\mu}{\mathfrak{Y}}(x) + a'(\mu)\,\overset{\mu}{J}(x) + b'(\mu)\,\overset{\mu}{Y}(x)\,, \tag{11}$$

ce qui donnera immédiatement l'expression de $\overset{0}{\mathfrak{C}}(x)$ et de $\overset{1}{\mathfrak{C}}(x)$, et nous aurons en outre la formule générale (*)

$$\overset{n+1}{\mathfrak{C}}(x) = \overset{0,n}{R}(x)\,\overset{1}{\mathfrak{C}}(x) - \overset{1,n-1}{R}(x)\,\overset{0}{\mathfrak{C}}(x) + \frac{2}{x}\sum_{s=0}^{s=n-1}\overset{s+1}{C}(x)\,\overset{s+1,n-s-1}{R}(x), \tag{12}$$

de sorte que notre proposition est démontrée dans toute sa généralité.

Pour obtenir la solution la plus simple des équations fonctionnelles (6) il faut supprimer les fonctions cylindriques terminant les seconds membres des formules (7) à (11).

II. Sur l'existence de la fonction $\overset{\mu}{B}(x)$.

§ 4. Comme nous venons de l'indiquer, nous aurons à étudier un système des équations fonctionnelles de la forme :

$$\Delta_1 \overset{\mu}{B}(x) = \overset{\mu-1}{B}(x) - \overset{\mu+1}{B}(x) - 2\,D_x \overset{\mu}{B}(x) = \frac{2}{x}\cdot \overset{\mu}{f}(x), \tag{1}$$

$$\Delta_2 \overset{\mu}{B}(x) = \overset{\mu-1}{B}(x) + \overset{\mu+1}{B}(x) - \frac{2\mu}{x}\overset{\mu}{B}(x) = \frac{2}{x}\cdot \overset{\mu}{g}(x), \tag{2}$$

où $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ sont deux fonctions données de x et de μ; l'existence du facteur $\frac{1}{x}$ aux seconds membres sera justifiée par la formule (7) du § 5.

Faisons sur les solutions de nos équations quelques remarques générales qui se présentent immédiatement. En effet, supposant que $\overset{\mu}{B}(x)$ soit une solution quelconque de (1), (2), on aura ces propositions suivantes:

1.° *La solution générale des mêmes équations sera*

$$\overset{\mu}{B}(x) + \overset{\mu}{C}(x),$$

$\overset{\mu}{C}(x)$ *désignant la fonction cylindrique générale.*

(*) *Annali di Matematica*, t. V, p. 26.

2° *$a(\mu)\overset{-\mu}{B}(x)$ est une solution d'un système analogue à* (1), (2) *pourvu que $a(\mu+1) = -a(\mu)$ et que $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ soient remplacées respectivement par $a(\mu)\overset{-\mu}{f}(x)$ et $-a(\mu)\overset{-\mu}{g}(x)$.*

3.° *C'est la même chose pour la fonction $\overset{\mu+\nu}{B}(\alpha x)$, ν et α étant des constantes quelconques, pourvu que $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ soient remplacées respectivement par*

$$x\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)D_x\overset{\mu+\nu}{B}(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}\overset{\mu+\nu}{f}(\alpha x),\quad \left(\frac{\mu+\nu}{\alpha}-\mu\right)\overset{\mu+\nu}{B}(\alpha x)+\frac{1}{\alpha}\overset{\mu+\nu}{g}(\alpha x).$$

§ 5. Additionnons, puis soustrayons les équations (1), (2), nous aurons respectivement

$$D_x\overset{\mu}{B}(x) = -\frac{\mu}{x}\overset{\mu}{B}(x)+\overset{\mu-1}{B}(x)-\frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right), \tag{3}$$

$$D_x\overset{\mu}{B}(x) = \frac{\mu}{x}\overset{\mu}{B}(x)-\overset{\mu+1}{B}(x)-\frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x)-\overset{\mu}{g}(x)\right), \tag{4}$$

système qui équivaut au système (1), (2).

Différentions ensuite par rapport à x l'équation (3) encore une fois, exprimons $D_x\overset{\mu}{B}(x)$ à l'aide de la formule (3) même, tandis que $D_x\overset{\mu-1}{B}(x)$ est tirée de (4) en y posant $\mu-1$ au lieu de μ; éliminons ensuite $\overset{\mu-1}{B}(x)$ à l'aide de (3). Traitons d'une manière analogue la formule (4). Ces calculs faits, nous verrons que $\overset{\mu}{B}(x)$ est une intégrale particulière de l'équation linéaire non homogène du deuxième ordre:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\mu^2}{x^2}\right)y=\frac{1}{x}\overset{\mu}{\omega}(x), \tag{5}$$

où nous aurons pour $\overset{\mu}{\omega}(x)$ les expressions suivantes

$$\overset{\mu}{\omega}(x) = \frac{\mu}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right)-D_x\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right)-\left(\overset{\mu-1}{f}(x)-\overset{\mu-1}{g}(x)\right), \tag{6}$$

$$\overset{\mu}{\omega}(x) = -\frac{\mu}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x)-\overset{\mu}{g}(x)\right)-D_x\left(\overset{\mu}{f}(x)-\overset{\mu}{g}(x)\right)+\left(\overset{\mu+1}{f}(x)+\overset{\mu+1}{g}(x)\right), \tag{6$_a$}$$

selon que nous avons pris pour point de départ la première ou la deuxième des formules (3), (4). Les formules (6) nous montrent en outre que les deux

fonctions $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ ne peuvent pas être choisies d'une manière complètement arbitraire. En effet, égalant les deux expressions obtenues pour $\overset{\mu}{\omega}(x)$, on aura la condition

$$\overset{\mu-1}{g}(x) - \overset{\mu+1}{g}(x) - 2\, D_x \overset{\mu}{g}(x) = \overset{\mu-1}{f}(x) + \overset{\mu+1}{f}(x) - \frac{2\,\mu}{x} \overset{\mu}{f}(x). \tag{7}$$

Mais cette condition nécessaire est-elle suffisante aussi pour la détermination de $\overset{\mu}{B}(x)$ à l'aide de (1), (2), les fonctions $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ étant données?

§ 6. Nous venons de démontrer qu'une solution quelconque du système (1), (2) doit satisfaire à l'équation différentielle (5). Pour trouver l'intégrale générale de cette équation remarquons que $\overset{\mu}{J}(x)$ est une intégrale particulière de l'équation homogène correspondante, de sorte qu'il faut chercher une solution de la forme

$$y = z\,.\,\overset{\mu}{J}(x),$$

d'où

$$z'' + z' \left(\frac{2\, D_x \overset{\mu}{J}(x)}{\overset{\mu}{g}(x)} + \frac{1}{x} \right) = \frac{\overset{\mu}{\omega}(x)}{x\, \overset{\mu}{J}(x)}\,,$$

équation qui est du premier ordre dans z', ce qui donnera

$$y = \overset{\mu}{J}(x) \int \frac{d\,x}{x\,(\overset{\mu}{J}(x))^2} \left(\int \overset{\mu}{\omega}(x)\, \overset{\mu}{J}(x)\, d\,x \right), \tag{α}$$

où nous avons supprimé la constante d'intégration. Or, cette expression peut être simplifiée en remarquant avec M. Lommel (*) que la fonction

$$\overset{\mu}{C}(x) = \overset{\mu}{J}(x) \int \frac{d\,x}{x\,(\overset{\mu}{J}(x))^2} \tag{β}$$

est égale à $\overset{\mu}{Y}(x)$ ou à $-\frac{\pi}{2 \sin \mu\,\pi} \overset{-\mu}{J}(x)$, selon que μ est égal ou non à un entier. Remarquons en passant qu'Euler (**) a déjà donné la fonction $\overset{0}{C}(x)$ comme une solution différente de $\overset{0}{J}(x)$ de l'équation de Bessel. Cela posé,

(*) *Mathematische Annalen*, t. 4, p. 104 (1871).

(**) *Institutiones calculi integralis*, t. 2, p. 235 (1769).

une intégration par parties nous donnera la solution (α) sous cette forme

$$\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) = \overset{\mu}{C}(x) \int \overset{\mu}{\omega}(x) \overset{\mu}{J}(x)\, d\, x - \overset{\mu}{J}(x) \int \overset{\mu}{\omega}(x)\, \overset{\mu}{C}(x)\, d\, x, \tag{8}$$

de sorte que la solution générale de notre équation différentielle (5) deviendra

$$y = \overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) + p(\mu)\, \overset{\mu}{J}(x) + q(\mu)\, \overset{\mu}{Y}(x), \tag{8_a}$$

$p(\mu)$, $q(\mu)$ étant deux fonctions arbitraires de μ.

§ 7. Cependant il n'est pas sûr que $\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x)$ soit une solution du système (1), (2). Or, effectuant les opérations indiquées par $\Delta_1 \overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x)$, $\Delta_2 \overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x)$, on pourra toujours mettre

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 \overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) - \frac{2}{x} \overset{\mu}{f}(x) &= \frac{2}{x} \overset{\mu}{f_1}(x), \\ \Delta_2 \overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) - \frac{2}{x} \overset{\mu}{g}(x) &= \frac{2}{x} \overset{\mu}{g_1}(x). \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Remarquons maintenant que $\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x)$ est une solution de (5), nous verrons, en suivant la marche indiquée au § 5, que $\overset{\mu}{f_1}(x)$, $\overset{\mu}{g_1}(x)$ doivent satisfaire aux équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{x}\left(\overset{\mu}{f_1}(x) + \overset{\mu}{g_1}(x)\right) - D_x\left(\overset{\mu}{f_1}(x) + \overset{\mu}{g_1}(x)\right) - \left(\overset{\mu-1}{f_1}(x) - \overset{\mu-1}{g_1}(x)\right) &= 0, \\ -\frac{\mu}{x}\left(\overset{\mu}{f_1}(x) - \overset{\mu}{g_1}(x)\right) - D_x\left(\overset{\mu}{f_1}(x) - \overset{\mu}{g_1}(x)\right) + \left(\overset{\mu+1}{f_1}(x) + \overset{\mu+1}{g_1}(x)\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

qui représentent un cas particulier de (6), (6_a).

Ces résultats nous conduisent naturellement à étudier les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu}{\omega_1}(x) &= \frac{\mu}{x} y_\mu - D_x y_\mu - z_{\mu-1}, \quad y_\mu = \overset{\mu}{f}(x) + \overset{\mu}{g}(x), \\ \overset{\mu}{\omega_2}(x) &= -\frac{\mu}{x} z_\mu - D_x z_\mu + y_{\mu+1}, \quad z_\mu = \overset{\mu}{f}(x) - \overset{\mu}{g}(x), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

qui représentent une généralisation de (6), (6_a). En appliquant de nouveau

la méthode du § 5, on trouvera les équations linéaires suivantes:

$$y''_\mu - \frac{1}{x}\, y'_\mu + \left(1 - \frac{\mu\,(\mu-2)}{x^2}\right) y_\mu = -\frac{\mu-1}{x}\, \overset{\mu}{\omega}_1(x) - D_x\, \overset{\mu}{\omega}_1(x) + \overset{\mu-1}{\omega}_2(x),$$

$$z''_\mu - \frac{1}{x}\, z'_\mu + \left(1 - \frac{\mu\,(\mu+2)}{x^2}\right) z_\mu = \frac{\mu+1}{x}\, \overset{\mu}{\omega}_2(x) - D_x\, \overset{\mu}{\omega}_2(x) - \overset{\mu+1}{\omega}_1(x).$$

Faisons maintenant

$$y_{\mu+1} = x\, u_\mu, \quad z_{\mu-1} = x\, v_\mu,$$

nous aurons respectivement les équations plus simples:

$$u''_\mu + \frac{1}{x}\, u'_\mu + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) u_\mu = \frac{1}{x}\left(-\frac{\mu}{x}\, \overset{\mu+1}{\omega}_1(x) - D_x\, \overset{\mu+1}{\omega}_1(x) + \overset{\mu}{\omega}_2(x)\right), \quad (10)$$

$$v''_\mu + \frac{1}{x}\, v'_\mu + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) v_\mu = \frac{1}{x}\left(\frac{\mu}{x}\, \overset{\mu-1}{\omega}_2(x) - D_x\, \overset{\mu-1}{\omega}_2(x) - \overset{\mu}{\omega}_1(x)\right), \quad (10_a)$$

qui sont de la même forme que (5), et dont, par conséquent, une solution peut être donnée immédiatement à l'aide de la formule (8).

Or, les formules (β) nous conduiront aux équations linéaires et homogènes qui correspondent à (10), (10_a), de sorte que nous aurons $\overset{\mu}{f}_1(x) - \overset{\mu}{g}_1(x)$, $\overset{\mu}{f}_1(x) + \overset{\mu}{g}_1(x)$ déterminées sous cette forme

$$\overset{\mu}{f}_1(x) - \overset{\mu}{g}_1(x) = x\left(a_1(\mu+1)\, \overset{\mu+1}{J}(x) + b_1(\mu+1)\, \overset{\mu+1}{Y}(x)\right),$$

$$\overset{\mu}{f}_1(x) + \overset{\mu}{g}_1(x) = x\left(a_2(\mu)\, \overset{\mu-1}{J}(x) + b_2(\mu)\, \overset{\mu-1}{Y}(x)\right),$$

les a et b désignant quatre fonctions arbitraires de μ. Portant maintenant ces expressions dans les équations (β), on aura

$$a_2(\mu) = a_1(\mu), \quad b_2(\mu) = b_1(\mu),$$

ce qui donnera pour nos fonctions $\overset{\mu}{f}_1(x)$, $\overset{\mu}{g}_1(x)$ ces expressions:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu}{f}_1(x) &= \frac{x}{2}\left(a(\mu+1)\, \overset{\mu+1}{J}(x) + b(\mu+1)\, \overset{\mu+1}{Y}(x) + a(\mu)\, \overset{\mu-1}{J}(x) + b(\mu)\, \overset{\mu-1}{Y}(x)\right), \\ \overset{\mu}{g}_1(x) &= \frac{x}{2}\left(a(\mu)\, \overset{\mu-1}{J}(x) + b(\mu)\, \overset{\mu-1}{Y}(x) - a(\mu+1)\, \overset{\mu+1}{J}(x) - b(\mu+1)\, \overset{\mu+1}{Y}(x)\right), \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

où a et b désignent deux fonctions arbitraires de μ. Voilà les solutions les plus générales de (β).

Cela posé, nous venons de démontrer le théorème suivant:

Une intégrale quelconque $\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x)$ *de l'équation linéaire* (5) *doit satisfaire aux équations fondamentales suivantes:*

$$\left.\begin{aligned}\overset{\mu-1}{\mathfrak{B}}(x) - \overset{\mu+1}{\mathfrak{B}}(x) - 2\,D_x \overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) &= \frac{2}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) + \overset{\mu}{f_1}(x)\right),\\ \overset{\mu-1}{\mathfrak{B}}(x) + \overset{\mu+1}{\mathfrak{B}}(x) - \frac{2\mu}{x}\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) &= \frac{2}{x}\left(\overset{\mu}{g}(x) + \overset{\mu}{g_1}(x)\right),\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

pourvu que $\overset{\mu}{f_1}(x)$, $\overset{\mu}{g_1}(x)$ *soient déterminées à l'aide des formules* (11).

8. Or, n'est-il pas possible de déterminer les fonctions $p(\mu)$, $q(\mu)$ figurant au second membre de (8_a) du § 6 d'une telle manière que $\overset{\mu}{f_1}(x)$, $\overset{\mu}{g_1}(x)$ peuvent être chassées des formules (12)?

En effet, un calcul direct montrera que la fonction

$$\overset{\mu}{\mathfrak{B}_1}(x) = p(\mu)\,\overset{\mu}{J}(x) + q(\mu)\,\overset{\mu}{Y}(x)$$

satisfait aux équations (1), (2) quand on y remplace $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ par les fonctions obtenues de (11) en posant $p(\mu) - p(\mu+1)$ au lieu de $a(\mu)$ et $q(\mu) - q(\mu+1)$ au lieu de $b(\mu)$. C'est-à-dire que la fonction $\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x) + \overset{\mu}{\mathfrak{B}_1}(x)$ sera une solution de nos équations fonctionnelles (1), (2), pourvu qu'il soit possible de déterminer les fonctions $p(\mu)$, $q(\mu)$ à l'aide des équations

$$p(\mu+1) - p(\mu) = a(\mu), \quad q(\mu+1) - q(\mu) = b(\mu); \qquad (\alpha)$$

cependant, la possibilité de ce problème n'est pas encore mise hors de doute dans tous les cas, que je sache.

Or, les équations fondamentales (1), (2) mêmes montreront immédiatement que les fonctions $\overset{\mu}{f_1}(x)$, $\overset{\mu}{g_1}(x)$ doivent généralement s'évanouir pour la fonction $\overset{\mu}{\mathfrak{B}}(x)$ définie à l'aide de (8). En effet, l'existence des fonctions $\overset{\mu}{f_1}(x)$, $\overset{\mu}{g_1}(x)$ n'est possible que si les fonctions données $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ se comportent d'une manière très particulière pour $x = 0$. Cependant, je n'ai pas réussi à démontrer dans tous les cas que la condition nécessaire (5) et suffisante aussi pour que les équations (1), (2) aient une solution.

Regardons encore ce même problème d'un autre point de vue. Il est évident que l'équation (5) nous fournira un moyen pour la détermination d'une

des fonctions $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$, l'autre étant donnée. Supposons, pour fixer des idées, qu'il s'agisse de déterminer la fonction $\overset{\mu}{f}(x)$. Dans ce cas l'équation (5) est de la même forme que (1) mais plus compliquée, ce qui nous conduira à chercher la fonction $\overset{\mu}{B}(x)$ qui détermine aisément la fonction $\overset{\mu}{f}(x)$. Or, appliquant la règle de LAGRANGE (*), on retombe, à l'aide de la fonction $\overset{\mu}{F}(x)$ définie par (1) du § 1, de nouveau dans des équations de la forme (α).

Après une discussion avec M. J.-P. GRAM je désespère d'un résultat favorable de ces recherches prises dans toute leur généralité. Du reste, ces recherches ne jouent aucun rôle dans la théorie des fonctions cylindriques, nous le verrons dans le paragraphe suivant.

§ 9. Supposons maintenant que la fonction $\overset{\mu}{\omega}(x)$ soit donnée, nous avons déjà indiqué une méthode pour la détermination de $\overset{\mu}{B}(x)$, de sorte qu'il ne reste encore qu'à déterminer les fonctions $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$ et à démontrer que ces trois fonctions satisfont aux équations (1), (2).

La détermination des fonctions u_μ, v_μ peut être effectuée immédiatement à l'aide des formules (8), (8_a) du § 6. Portons ensuite les fonctions u, v ainsi trouvées dans les équations (9) du § 7, nous pourrons toujours mettre

$$\frac{\mu}{x} y_\mu - D_x y_\mu - z_{\mu-1} = \overset{\mu}{\omega_1}(x) + \overset{\mu}{h_1}(x),$$

$$-\frac{\mu}{x} z_\mu - D_x z_\mu + y_{\mu+1} = \overset{\mu}{\omega_2}(x) + \overset{\mu}{h_2}(x).$$

Formons ensuite de nouveau les équations différentielles auxquelle y_μ, z_μ, doivent satisfaire, nous aurons pour $\overset{\mu}{h_1}(x)$, $\overset{\mu}{h_2}(x)$ les conditions suivantes

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu+1}{x} \overset{\mu}{h_2}(x) - D_x \overset{\mu}{h_2}(x) - \overset{\mu+1}{h_1}(x) = 0, \\ -\frac{\mu-1}{x} \overset{\mu}{h_1}(x) - D_x \overset{\mu}{h_1}(x) + \overset{\mu-1}{h_2}(x) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

d'où l'on verra que $\overset{\mu}{h_1}(x)$, $\overset{\mu}{h_2}(x)$ sont toutes les deux des solutions de l'é-

(*) Voir, par exemple, MARKOFF: *Differenzenrechnung*, p. 151, Leipsig, 1896.

quation linéaire et homogène

$$h'' - \frac{1}{x} h' + \left(1 - \frac{\mu^2 - 1}{x^2}\right) h = 0,$$

ce qui donnera

$$\overset{\mu}{h_1}(x) = x\left(a_1(\mu) \overset{\mu}{J}(x) + b_1(\mu) \overset{\mu}{Y}(x)\right),$$

$$\overset{\mu}{h_2}(x) = x\left(a_2(\mu) \overset{\mu}{J}(x) + b_2(\mu) \overset{\mu}{Y}(x)\right),$$

fonctions qui ne satisfont aux équations (α) que si l'on a à la fois

$$a_2(\mu) = a_1(\mu + 1), \quad b_2(\mu) = b_1(\mu + 1).$$

Cela posé, désignons par y_μ, z_μ des solutions quelconques des équations (10), nous aurons généralement

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu}{x} y_\mu - D_x y_\mu - z_{\mu-1} = \overset{\mu}{\omega_1}(x) + x\left(a(\mu) \overset{\mu}{J}(x) + b(\mu) \overset{\mu}{Y}(x)\right), \\ &-\frac{\mu}{x} z_\mu - D_x z_\mu + y_{\mu+1} = \overset{\mu}{\omega_2}(x) + x\left(a(\mu+1) \overset{\mu}{J}(x) + b(\mu+1) \overset{\mu}{Y}(x)\right), \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

$a(\mu)$, $b(\mu)$ désignant deux fonctions arbitraires de μ.

Or, la différence de deux fonctions y_μ ou z_μ peut être écrite sous cette forme

$$\mathfrak{y}_\mu = x\left(a_1(\mu+1) \overset{\mu+1}{J}(x) + b_1(\mu+1) \overset{\mu+1}{Y}(x)\right),$$

$$\mathfrak{z}_\mu = x\left(a_2(\mu-1) \overset{\mu-1}{J}(x) + b_2(\mu-1) \overset{\mu-2}{Y}(x)\right),$$

ce qui donnera

$$\frac{\mu}{x} \mathfrak{y}_\mu - D_x \mathfrak{y}_\mu - \mathfrak{z}_{\mu-1} =$$
$$= x\left((a_2(\mu-1) - a_1(\mu)) \overset{\mu}{J}(x) + (b_2(\mu-1) - b_1(\mu)) \overset{\mu}{Y}(x)\right),$$

$$-\frac{\mu}{x} \mathfrak{z}_\mu - D_x \mathfrak{z}_\mu + \mathfrak{y}_{\mu+1} =$$
$$= x\left((a_2(\mu) - a_1(\mu+1)) \overset{\mu}{J}(x) + (b_2(\mu) - b_1(\mu+1)) \overset{\mu}{Y}(x)\right),$$

de sorte que les fonctions $y_\mu + \mathfrak{y}_\mu$, $z_\mu + \mathfrak{z}_\mu$ représentent des solutions des équations (9) du § 7, pourvu que

$$a(\mu) + a_2(\mu - 1) = a_1(\mu), \quad b(\mu) + b_2(\mu - 1) = b_1(\mu),$$

conditions que l'on sait remplir d'une infinité de façons. Cela posé, nous venons de démontrer le théorème suivant:

Supposons donnée la fonction $\overset{\mu}{\omega}(x)$, *une solution quelconque de l'équation différentielle* (5) *satisfera aux équations fondamentales* (1), (2), *pourvu que les fonctions*

$$u_\mu = \frac{1}{x}\left(\overset{\mu+1}{f}(x) + \overset{\mu+1}{g}(x)\right), \quad v_\mu = \frac{1}{x}\left(\overset{\mu-1}{f}(x) - \overset{\mu-1}{g}(x)\right)$$

soient des solutions convenables des équations (10), (10_a).

III. Sur l'application des fonctions $\overset{\mu}{B}(x)$ dans la théorie des fonctions cylindriques.

§ 10. Étudions maintenant la fonction

$$\overset{\mu}{G}(x) = \frac{x}{2}\left(\overset{\mu}{B}(x)\,\overset{\mu-1}{C}(x) - \overset{\mu-1}{B}(x)\,\overset{\mu}{C}(x)\right),$$

qui est essentielle dans les recherches qui nous occupent. En premier lieu, la formule fondamentale (2) du § 4 et la formule analogue pour la fonction cylindrique générale $\overset{\mu}{C}(x)$ montreront que $\overset{\mu}{G}(x)$ satisfait à l'équation

$$\overset{\mu}{G}(x) = \overset{\mu+1}{G}(x) + \overset{\mu}{g}(x)\,\overset{\mu}{C}(x), \tag{1}$$

ou plus généralement

$$\overset{\mu}{G}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \overset{\mu+s}{g}(x)\,\overset{\mu+s}{C}(x) + \overset{\mu+n+1}{G}(x), \tag{1_a}$$

n désignant un positif entier. Faisons ensuite croître à l'infini ce positif entier n, nous aurons une formule de la forme

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \overset{\mu+s}{g}(x)\,\overset{\mu+s}{C}(x) = \frac{x}{2}\left(\overset{\mu}{B}(x)\,\overset{\mu-1}{C}(x) - \overset{\mu-1}{B}(x)\,\overset{\mu}{C}(x)\right) - \overset{\mu}{L}(x), \tag{2}$$

pourvu que la limite

$$\overset{\mu}{L}(x) = \lim_{n=\infty} \overset{\mu+n+1}{G}(x) \tag{2_a}$$

devienne une fonction finie, déterminée et périodique par rapport à μ, en ayant la période additive $+1$; cette dernière condition est du reste une conséquence immédiate des deux premières.

Cela posé, appliquons la deuxième proposition du § 4, nous aurons de même

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{-\mu-s}{g}(x) \overset{\mu+s}{C}(x) = -\frac{x}{2}\left(\overset{-\mu}{B}(x)\overset{\mu-1}{C}(x) + \overset{-\mu+1}{B}(x)\overset{\mu}{C}(x)\right) - \overset{\mu}{L}_1(x), \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\overset{\mu}{L}_1(x) = \lim_{n=\infty}\left[(-1)^n\left(\overset{-\mu-n}{B}(x)\overset{\mu+n-1}{C}(x) + \overset{-\mu-n+1}{B}(x)\overset{\mu+n}{C}(x)\right)\right], \tag{3_a}$$

pourvu que cette limite aît une valeur finie et déterminée.

L'application de la troisième proposition du § 4 s'effectuera immédiatement aussi.

§ 11. Faisons ici quelques remarques essentielles sur les formules développées en § 10. Supposons que $\overset{\mu}{B}(x)$ soit aussi une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre μ, la formule (2) donnera immédiatement la formule fondamentale (4) du § 2, comme je l'ai indiqué dans mon Mémoire cité (*).

Du reste, il est évident que les formules du § 10 gardent leur validité si l'on se bornera à supposer que $\overset{\mu}{C}(x)$ satisfasse seulement à l'équation (α) du § 1 et $\overset{\mu}{B}(x)$ seulement à (2) du § 4. Or, en se rappelant qu'une solution quelconque de (α), et que la différence de deux solutions quelconques de (2) sont représentées par la fonction $\overset{\mu}{F}(x)$ définie dans le § 1, on verra, en vertu de (θ) du § 1, que cette généralisation ne vaut pas qu'on y prenne garde.

En outre, il est possible de déterminer une solution de (2) du § 4 de manière à pouvoir chasser la fonction $\overset{\mu}{L}(x)$ du second membre de (2) du § 10.

Appliquons maintenant la formule (1_a) du § 10, après avoir posé $\overset{\mu+\nu}{B}(\alpha x)$ au lieu de $\overset{\mu}{B}(x)$, $\overset{\mu}{J}(x)$ et puis $\overset{\mu}{Y}(x)$ au lieu de $\overset{\mu}{C}(x)$, nous aurons, en vertu

(*) *Annali di Matematica*, 3e série, t. V, p. 28.

de (5) du § 3, la formule générale

$$\overset{\mu+\nu+n}{B}(\alpha x) = \overset{\mu-1,n}{R}(x)\,\overset{\mu+\nu}{B}(\alpha x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\,\overset{\mu+\nu-1}{B}(\alpha x) - \frac{2}{x}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\overset{\mu+\nu+s}{g}(\alpha x)\,\overset{\mu+s,n-s-1}{R}(x)$$
$$+\frac{2}{x}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\left(\frac{\mu+\nu+s}{\alpha}-(\mu+s)\right)\overset{\mu+s,n-s-1}{R}(x)\cdot\overset{\mu+\nu+s}{B}(\alpha x),$$

ou bien, après une légère modification

$$\left.\begin{aligned}\overset{\nu+n}{B}(y) &= \overset{\mu-1,n}{R}(x)\,\overset{\nu}{B}(y) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\,\overset{\nu-1}{B}(y) - \frac{2}{x}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\overset{\nu+s}{g}(y)\,\overset{\mu+s,n-s-1}{R}(x)\\ &+2\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\left(\frac{\nu+s}{y}-\frac{\mu+s}{x}\right)\overset{\mu+s,n-s-1}{R}(x)\,\overset{\nu+s}{B}(y),\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

de cette formule on peut en déduire une foule d'autres. Supposant par exemple $\mu=\nu$, $y=x$, on aura $\overset{\nu+n}{B}(y)$ réduit à $\overset{\nu}{B}(y)$, $\overset{\nu-1}{B}(y)$. Supposons encore $x=\infty$, nous trouverons $\overset{\nu+n}{B}(y)$ comme une fonction linéaire de $B^{\nu-1}$, $B^{\nu}, \ldots,$ $B^{\nu+n-1}$, et ainsi de suite.

§ 12. Différentions encore par rapport à x notre fonction $\overset{\mu}{G}(x)$ du § 10, nous aurons, en appliquant les formules (3), (4) du § 5 et les formules analogues qui contiennent les fonctions cylindriques :

$$2\,D_x\,\overset{\mu}{G}(x) = \overset{\mu}{C}(x)\left(\overset{\mu-1}{f}(x)-\overset{\mu-1}{g}(x)\right) - \overset{\mu-1}{C}(x)\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right).$$

Éliminant ensuite $\overset{\mu-1}{C}(x)$, à l'aide de la formule

$$\overset{\mu-1}{C}(x) = \frac{\mu}{x}\,\overset{\mu}{C}(x) + D_x\,\overset{\mu}{C}(x),$$

on aura

$$\overset{\mu}{\omega}(x)\,\overset{\mu}{C}(x) = -\,2\,D_x\,\overset{\mu}{G}(x) - D_x\left[\overset{\mu}{C}(x)\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right)\right],$$

où $\overset{\mu}{\omega}(x)$ est la même fonction qui figure aux formules (5), (6) du § 5. Cela posé, nous aurons finalement la formule élégante :

$$\int\overset{\mu}{\omega}(x)\,\overset{\mu}{C}(x)\,dx = x\left(\overset{\mu}{C}(x)\,\overset{\mu-1}{B}(x) - \overset{\mu-1}{C}(x)\,\overset{\mu}{B}(x)\right) - \overset{\mu}{C}(x)\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right), \qquad (5)$$

où nous avons supprimé la constante d'intégration qui doit être une fonction arbitraire de μ.

Il est évident que notre formule (5) contient celle trouvée par M. Sonine (*) pour l'intégrale (α) mentionnée dans l'Introduction.

La marche qu'il faut suivre pour obtenir l'intégrale indéfinie figurant au premier membre de (5) est indiquée précisément par le théorème terminant le § 9.

Cela posé, notre formule (5) déterminera immédiatement la deuxième intégrale de M. Sonine (**), savoir

$$\int f(x)\,\overset{\mu+\nu}{C_1}\left(\psi(x)\right)\overset{\mu}{C}(x)\,d\,x.$$

Appliquons maintenant la formule (1_a) du § 10, nous aurons

$$\int \overset{\mu}{\omega}(x)\,\overset{\mu}{C}(x)\,d\,x = -\,2\,.\sum_{s=0}^{s=n-1}\overset{\mu+s}{g}(x)\,\overset{\mu+s}{C}(x) - 2\,\overset{\mu+n}{G}(x) - \overset{\mu}{C}(x)\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right), \quad (6)$$

formule qui a été indiquée dans certains cas très particuliers par M. Lommel (***). Supposons qu'il soit possible de faire croître au delà de toute limite le positif entier n, nous aurons de même

$$2\,\overset{\mu}{L}(x) - \int \overset{\mu}{\omega}(x)\,\overset{\mu}{C}(x)\,d\,x - \overset{\mu}{C}(x)\left(\overset{\mu}{f}(x)+\overset{\mu}{g}(x)\right) = 2\,.\sum_{s=0}^{s=\infty}\overset{\mu+s}{g}(x)\,\overset{\mu+s}{C}(x). \quad (6_a)$$

Il semble être remarquable que le second membre de cette formule ne contient pas la fonction $\overset{\mu}{f}(x)$; or, on verra aisément que ce fait s'accorde bien avec les remarques faites au commencement du § 11 et avec la formule (7) du § 5.

§ 13. Avant de donner des exemples plus généraux de notre méthode il nous semble utile d'évaluer quelques formules très particulières dues à M. Lommel (****) et souvent appliquées dans la théorie des fonctions cylindriques et dans leurs applications.

Pour la fonction $\overset{\mu}{B}(x) = \overset{\mu+\nu}{C_1}(\beta\,x)$, C_1 étant une fonction cylindrique quel-

(*) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 30 (1880).
(**) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 30 (1880).
(***) *Mathematische Annalen*, t. 14, p. 531-34 (1879).
(****) loc. cit. p. 523.

conque, tandis que ν, β désignent deux constantes finies, nous aurons

$$\overset{\mu}{f}(x) = x\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) D_x \overset{\mu+\nu}{C_1}(\beta x),$$

$$\overset{\mu}{g}(x) = \left(\frac{\mu+\nu}{\beta} - \mu\right) \overset{\mu+\nu}{C_1}(\beta x),$$

$$\overset{\mu}{\omega}(x) = \left((1-\beta^2)\,x + \frac{(\mu+\nu)^2 - \mu^2}{x}\right) \overset{\mu+\nu}{C_1}(\beta x)$$

dont la dernière peut être déduite plus facilement à l'aide de l'équation différentielle à laquelle $\overset{\mu+\nu}{C_1}(\beta x)$ doit satisfaire. Appliquons maintenant la formule générale (5) du § 12, nous avons, après avoir posé $\mu - \nu$ au lieu de ν, αx au lieu de x et $\frac{\beta}{\alpha}$ au lieu de β:

$$\left.\begin{aligned} \int\left((\alpha^2-\beta^2)\,x + \frac{\nu^2-\mu^2}{x}\right) \overset{\nu}{C_1}(\beta x)\, \overset{\mu}{C}(\alpha x)\, dx = \beta x\, \overset{\mu}{C}(\alpha x)\, \overset{\nu-1}{C_1}(\beta x) - \\ - \alpha x\, \overset{\mu-1}{C}(\alpha x)\, \overset{\nu}{C_1}(\beta x) - (\nu-\mu)\, \overset{\mu}{C}(\alpha x)\, \overset{\nu}{C_1}(\beta x), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ce qui est précisément la formule de M. LOMMEL.

Posant $\nu = \mu$, $C_1 = C$, on aura une formule appliquée dans des recherches sur les zéros de $\overset{n}{J}(x)$ par MM. HANKEL (*), HEINRICH WEBER (**), HOBSON (***), GEGENBAUER (****). Si dans cette formule on fait $\alpha = \beta$, les deux termes s'évanouiront, de sorte qu'il faut différentier par rapport à β et poser ensuite $\beta = \alpha$, ce qui donnera

$$\int x\, \overset{\mu}{C}(x)\, \overset{\mu}{C_1}(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\left(\overset{\mu}{C}(x)\, \overset{\mu}{C_1}(x) - \overset{\mu-1}{C}(x)\, \overset{\mu+1}{C_1}(x)\right). \quad (8)$$

Posant encore dans (7) $\alpha = \beta = 1$, on aura une autre simple formule. Différentiant cette formule par rapport à ν, posant ensuite $\nu = \mu$, on aura de

(*) *Mathematische Annalen*, t. 8, p. 472 (1875).
(**) *Journal de Crelle*, t. 76, p. 4 (1873).
(***) *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 28, p. 370-75 (1897).
(****) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. 8, p. 383-384 (1897).

même

$$\left.\begin{aligned}2\mu\int\frac{\overset{\mu}{C}(x)\,\overset{\mu}{C_1}(x)}{x}\,d\,x = x\left(\overset{\mu-1}{C}(x)\,\overset{\mu}{\mathfrak{C}_1}(x) - \overset{\mu}{C}(x)\,\overset{\mu-1}{\mathfrak{C}_1}(x)\right) - \\ - 2\,\overset{\mu}{\Delta}(a, b)\log\frac{x}{2} + \overset{\mu}{C}(x)\,\overset{\mu}{C_1}(x)\,.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Appliquons la proposition sur $\overset{\mu}{\mathfrak{C}_1}(x)$ démontrée au § 3, nous aurons cette autre proposition:

Supposons μ égal à un entier différent de zéro, notre intégrale (9) *peut être exprimée sous forme finie, à l'aide des fonctions cylindriques et des fonctions élémentaires.*

Cela n'est plus vrai pour $\mu = 0$. Dans ce cas les deux membre de (9) s'évanouiront, de sorte qu'il faut différentier par rapport à μ, ce qui introduira des fonctions nouvelles, différentes des fonctions cylindriques.

IV. Sur les fonctions introduites par $\int x^{\nu}\,\overset{\mu}{C}(x)\,d\,x$.

§ 14. Avant de construire la fonction $\overset{\mu}{B}(x)$ qui correspond à $\overset{\mu}{\omega}(x) = x^{\nu}$ je me sens engagé à faire une remarque essentielle sur ce problème en général.

Il est évident que l'adjonction à $\overset{\mu}{\omega}(x)$ d'un facteur indépendant de x n'a aucune influence sur l'intégrale indéfinie dont il s'agit de déterminer la valeur. Or, $\overset{\mu}{\omega}(x)$ étant multipliée par un tel facteur (fonction de μ), il sera la même chose pour la fonction $\overset{\mu}{B}(x)$; c'est ce que démontrera immédiatement l'équation différentielle (5) du § 5 à laquelle $\overset{\mu}{B}(x)$ doit satisfaire. Cependant, l'adjonction d'un tel facteur (fonction de μ) sera d'une haute importance pour la forme des équations fondamentales auxquelles $\overset{\mu}{B}(x)$ doit satisfaire, de sorte qu'il importe beaucoup de déterminer le facteur susdit d'une telle manière que ces équations prennent la forme la plus simple. Les fonctions traitées dans cette section et dans les deux sections suivantes montreront clairement

l'importance d'un tel facteur convenable; mais voilà justement ce qui constitue la difficulté du problème.

Ces remarques faites, regardons dans le cas qui nous occupe la fonction

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}.$$

Nous aurons d'après un calcul direct

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = \frac{\nu + \mu}{2} \cdot \frac{\nu - \mu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu - 2} + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu},$$

identité qui nous conduira naturellement à poser

$$\overset{\mu,\nu}{\omega}(x) = \frac{2 \cos \frac{\pi}{2} (\mu - \nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2} + 1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \tag{1}$$

d'où l'on tire, pour la fonction correspondante $\overset{\mu,\nu}{B}(x)$, la formule fondamentale

$$\overset{\mu,\nu+2}{B}(x) = \overset{\mu,\nu}{B}(x) - \frac{\cos \frac{\pi}{2} (\mu - \nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2} + 1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \tag{2}$$

ou plus généralement, n étant un positif entier

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\mu,\nu+2n}{B}(x) = \overset{\mu,\nu}{B}(x) - \\ &- \cos \frac{\pi}{2} (\mu - \nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu + 2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2} + s + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2} + s + 1\right)} . \end{aligned}\right\} \tag{2_a}$$

Posant dans (2_a) $\nu - 2n$ au lieu de ν, on aura une formule analogue pour la réduction de $\overset{\mu,\nu-2n}{B}(x)$ à $\overset{\mu,\nu}{B}(x)$.

Faisant dans (2_a) le positif entier n croître à l'infini, on obtiendra une série absolument convergente pour toutes les valeurs finies de x, μ, ν, abstraction faite du facteur x^{ν}. En outre, $\overset{\mu,\nu+2n}{\omega}(x)$ s'évanouira dans le même cas, c'est-

à-dire que la fonction la plus simple des B sera la suivante :

$$\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+s+1\right)}, \tag{3}$$

qui est une fonction entière des trois variables x, μ, ν, abstraction faite du facteur x^ν.

Remarquons que la fonction $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$, à un simple facteur près, est identique à celle introduite par M. Lommel (*). On aura en effet

$$\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{2^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \cdot \overset{\nu \;\; 1,\mu}{s}(x).$$

Or, c'est précisément ce facteur qui simplifie les équations fondamentales de notre fonction Π; voilà la raison pour que ces mêmes équations ont été inconnues pour M. Lommel.

Supposons $\nu = \pm\mu - 2p$, p étant un entier non négatif, notre démonstration de la formule fondamentale (2) pour la fonction $\overset{\mu,\nu}{B}(x)$ est en défaut, il est vrai. Or, prenant aussi dans ce cas comme définition pour $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$ la série infinie figurant au second membre de (3), on verra immédiatement que cette fonction satisfera à la formule (2). En outre, la forme même de l'équation différentielle (5) du § 5 montre que cette même fonction $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$, étant généralement une solution de cette équation, le sera encore dans le cas susdit.

§ 15. Substituant dans les formules générales la valeur (1) de ω, on aura par un calcul direct

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) - \overset{\mu}{g}(x)\right) &= \overset{\mu+1,\nu-1}{\Pi}(x) - \overset{\mu+1,\nu}{\Pi}(x), \\ \frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) + \overset{\mu}{g}(x)\right) &= \overset{\mu-1,\nu}{\Pi}(x) - \overset{\mu-1,\nu-1}{\Pi}(x), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. 9, p. 435 (1876).

ce qui donnera les formules fondamentales suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\mu-1,\nu}{\Pi}(x) - \overset{\mu+1,\nu}{\Pi}(x) = 2\, D_x \overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x),\\
&\overset{\mu-1,\nu}{\Pi}(x) + \overset{\mu+1,\nu}{\Pi}(x) = \frac{2\,\mu}{x} \overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Posant dans ces formules encore une fois $\nu + 1$ au lieu de ν, on aura de même, en vertu de (2)

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\mu-1,\nu+1}{\Pi}(x) - \overset{\mu+1,\nu+1}{\Pi}(x) = 2\, D_x \overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) -\\
&\quad - \frac{\nu \cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1},\\
&\overset{\mu-1,\nu+1}{\Pi}(x) + \overset{\mu+1,\nu+1}{\Pi}(x) = \frac{2\,\mu}{x} \overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) -\\
&\quad - \frac{\mu \cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1},
\end{aligned}\right\} \tag{5$_a$}$$

ce qui montre que la fonction

$$\overset{\mu,\nu}{\Psi}(x) = \overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) + \overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x)$$

satisfera à un système des équations de la forme (1), (2) du § 4 dont les fonctions $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$, se déterminant immédiatement en vertu de (5_a), seront des fonctions très simples.

Appliquant encore une fois la formule (2), on aura de même

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\mu-1,\mu+\nu-1}{\Pi}(x) - \overset{\mu+1,\mu+\nu+1}{\Pi}(x) = 2\, D_x \overset{\mu,\mu+\nu}{\Pi}(x) -\\
&\quad - \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\mu-1},\\
&\overset{\mu-1,\mu+\nu-1}{\Pi}(x) + \overset{\mu+1,\mu+\nu+1}{\Pi}(x) = \frac{2\,\mu}{x} \overset{\mu,\mu+\nu}{\Pi}(x) +\\
&\quad + \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu+1\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\mu-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{5$_b$}$$

§ 16. Notre fonction Π renferme un grand nombre de fonctions plus spéciales connues auparavant et étudiées l'une après l'autre selon des méthodes différentes. Nous avons ici à déduire ces fonctions et leurs propriétés fondamentales en faisant varier simplement les deux paramètres μ et ν.

1.° $\nu = 0$, $\nu = 1$, nous aurons respectivement

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu,0}{\Pi}(x) &= \overset{\mu}{\Pi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\cos(\mu\omega)\,d\omega, \\ \overset{\mu,1}{\Pi}(x) &= \overset{\mu}{X}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\omega)\sin(\mu\omega)\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

La fonction $\overset{\mu}{\Psi}(x) = \overset{\mu}{\Pi}(x) + \overset{\mu}{X}(x)$ a été introduite dans la théorie des fonctions cylindriques par ANGER (*), tandis que CAUCHY (**) et BOURGET (***) l'ont étudiée plus tard. Dans deux Mémoires (****) récents j'ai donné de nouvelles propriétés des fonctions $\overset{\mu}{\Pi}(x)$, $\overset{\mu}{X}(x)$.

2.° $\nu = \pm\mu - 2p$, p étant un entier non négatif.

Dans ce cas $\overset{\mu,\nu}{\omega}(x)$ s'évanouira, ce qui montre, en vertu de nos recherches de la section II, que $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$ deviendra une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre μ. On aura en effet

$$\overset{\mu,\mu-2p}{\Pi}(x) = \overset{\mu}{J}(x), \quad \overset{\mu,-\mu-2p}{\Pi}(x) = \cos\mu\pi \,.\, \overset{-\mu}{J}(x). \tag{7}$$

Pour obtenir dans ce cas une fonction qui satisfait à un système des équations de la forme (1), (2) du § 4, il faut différentier $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$ par rapport ou à ν ou à μ. Posant

$$2\,D_\nu\,\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) = \overset{\mu,\nu}{K}(x), \quad 2\,D_\mu\,\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) = \overset{\mu,\nu}{\mathfrak{K}}(x),$$

(*) *Comptes rendus*, t. 39, p. 129 (1854). *Neueste Schriften d. Naturf. Gesellschaft*, Danzig, 1855, p. 14-17.

(**) *Comptes rendus*, t. 39, p. 132.

(***) *Comptes rendus*, t. 39, p. 283.

(****) *Mathematische Annalen*, t. 52, p. 236, 237, 583 (1899).

on aura respectivement

$$\overset{\mu,\nu}{K}(x) = \left(\pi \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(\mu - \nu) + 2 \log \frac{x}{2}\right) \overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) - \cos \frac{\pi}{2}(\mu - \nu) \,.$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+s+1\right)} \,.$$

$$\cdot \left[\psi\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)+\psi\left(\frac{\nu-\mu}{2}+s+1\right)\right],$$

$$\overset{\mu,\nu}{\mathfrak{K}}(x) = -\pi \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(\mu-\nu) \overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) - \cos \frac{\pi}{2}(\mu-\nu) \,.$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+s+1\right)} \,.$$

$$\cdot \left[\psi\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)-\psi\left(\frac{\nu-\mu}{2}+s+1\right)\right],$$

où $\psi(\omega)$ est la fonction définie dans le § 1. Cela posé, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu,\mu}{K}(x) &= 2 \overset{\mu}{J}(x) \log \frac{x}{2} - \\ &- \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s}}{s!\,\Gamma(\mu+s+1)} \left(\psi(\mu+s+1)+\psi(s+1)\right), \\ \overset{\mu,\mu}{\mathfrak{K}}(x) &= \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s}}{s!\,\Gamma(\mu+s+1)} \left(\psi(s+1)-\psi(\mu+s+1)\right); \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

appliquant ensuite la méthode du § 1, nous aurons généralement:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu,\mu-2p}{K}(x) &= \overset{\mu,\mu}{K}(x) - \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{(p-s-1)!}{\Gamma(\mu+s-p-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s-2p}, \\ \overset{\mu,\mu-2p}{\mathfrak{K}}(x) &= \overset{\mu,\mu}{\mathfrak{K}}(x) + \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{(p-s-1)!}{\Gamma(\mu+s-p-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s-2p}, \end{aligned}\right\} \quad (8_a)$$

ce qui donnera la formule remarquable

$$\overset{\mu,\mu-2p}{K}(x) + \overset{\mu,\mu-2p}{\mathfrak{K}}(x) = 2 D_\mu \overset{\mu}{J}(x). \quad (9)$$

On aura de même

$$\left.\begin{aligned} \overset{\mu,-\mu-2p}{K}(x) &= \pi \sin \mu \pi \overset{-\mu}{J}(x) + \cos \mu \pi \overset{-\mu,-\mu-2p}{K}(x), \\ \overset{\mu,-\mu-2p}{\mathfrak{K}}(x) &= -\pi \sin \mu \pi \overset{-\mu}{J}(x) + \cos \mu \pi \overset{-\mu,-\mu-2p}{\mathfrak{K}}(x). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Les équations fondamentales auxquelles les fonctions $\overset{\mu,\mu-2p}{K}(x)$, $\overset{\mu,\mu-2p}{\mathfrak{K}}(x)$ doivent satisfaire peuvent être formées immédiatement à l'aide de (5_b). La fonction ω qui correspond à K s'évanouira dans le cas $\mu = \nu$, ν étant un entier égal à p au plus; c'est-à-dire que la fonction K deviendra une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre ν. On aura en effet dans ce cas

$$\overset{\nu,\nu-2p}{K}(x) = \overset{\nu}{Y}(x), \quad \nu \leqq p, \tag{11}$$

de sorte qu'il faut différentier $\overset{\mu,\mu-2p}{K}(x)$ par rapport à μ et poser ensuite $\mu = \nu$, pour avoir une fonction qui satisfait à un système des équations fonctionnelles de la forme (1), (2) du § 4. Nous renonçons à regarder la fonction nouvelle ainsi obtenue.

Supposant que ν soit un positif entier plus grand que p, on aura au contraire

$$\overset{\nu,\nu-2p}{K}(x) = \overset{\nu}{Y}(x) + \sum_{s=0}^{s=\nu-p-1} \frac{(\nu - s - 1)!}{s!} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-2s}. \tag{11_a}$$

§ 17. Il nous reste encore de montrer comment les fonctions dites *besséliennes* de la deuxième espèce, et quelques autres, peuvent être déduites de nos deux fonctions K, $\mathfrak{K}$.

3.° Posons

$$\overset{\mu,\mu+1}{K}(x) = \overset{\mu}{Z}(x), \tag{12}$$

nous aurons, pourvu que $\Re(\mu)$ (*) $> -\frac{1}{2}$, cette formule remarquable

$$\overset{\mu}{Z}(x) = \frac{2\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin \omega)(\cos \omega)^{2\mu}\, d\,\omega, \tag{12_a}$$

intégrale qui est entièrement analogue à celle obtenue pour $\overset{\mu}{J}(x)$ même. La

---

(*) Par $\Re(\mu)$ nous désignons constamment la partie réelle de μ.

fonction $\overset{\mu}{Z}(x)$ a été regardée pour la première fois par M. P. Siemon (*), d'après ce que je sais. Nous aurons encore

$$\overset{\mu,-\mu+1}{K}(x) = \sin\mu\pi\,\overset{-\mu}{Z}(x). \tag{12_b}$$

En tenant compte des formules (2_a) du § 14 et (7) du § 16, on démontrera immédiatement la proposition suivante:

La fonction $\overset{p+\frac{1}{2}}{Z}(x)$, *p étant un entier quelconque, se réduira à* $\overset{p+\frac{1}{2}}{J}(x)$, *abstraction faite peut-être d'une fonction élémentaire.*

4.° Pour la fonction

$$\overset{n}{\Omega}(x) = \int_0^\pi \sin(n\,\omega - x\sin\omega)\,d\,\omega, \tag{13}$$

n étant un entier quelconque, nous aurons de même

$$\overset{2p+1,0}{K}(x) = \overset{2p+1}{\Omega}(x), \quad \overset{2p,1}{K}(x) = \overset{2p}{\Omega}(x). \tag{13_a}$$

La fonction $\overset{n}{\Omega}(x)$ a été introduite par MM. Lommel (**) et H.-F. Weber (***); elle joue un rôle assez considérable dans les applications sur la Physique mathématique des fonctions cylindriques. Voir à ce sujet les livres de M. Rayleigh (****) et de MM. Gray et Matthews (*****).

On verra immédiatement que $\overset{0}{Z}(x)$ et $\overset{0}{\Omega}(x)$ sont identiques; appliquant ensuite la formule (2_a) du § 14, on aura la proposition suivante:

La fonction $\overset{n}{Z}(x)$, *n étant un entier quelconque, peut être réduite à* $\overset{n}{\Omega}(x)$, *abstraction faite d'une fonction élémentaire.*

Dans le cas général, où μ n'est pas égal à un entier, on aura sans peine

$$\overset{\mu}{\Omega}(x) = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\left(\cos\mu\pi\,\overset{\mu}{\Psi}(x) - \overset{-\mu}{\Psi}(x)\right), \tag{13_b}$$

(*) *Programm der Luisenschule.* Berlin, 1890.

(**) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 187 (1880).

(***) *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. 24, p. 47 (1879).

(****) *Theory of Sound*, t. 2, p. 164. Londres, 1896.

(*****) *Treatise on Bessel Functions*, p. 202. Londres, 1895.

formule qui est due à M. H.-F. Weber; elle est analogue à (δ) du § 1 qui exprime $\overset{\mu}{Y}(x)$ à l'aide de $\overset{\mu}{J}(x)$.

5.° Posons encore

$$\overset{2p,2}{K}(x) = \overset{2p}{Y}(x) + \frac{4}{2p}\overset{2p}{O}(x), \quad \overset{2p+1,1}{K}(x) = \overset{2p+1}{Y}(x) + \frac{4}{2p+1}\overset{2p+1}{O}(x), \tag{14}$$

où p est un entier non négatif, la fonction rationnelle $\overset{n}{O}(x)$ est indentique à celle de M. Carl Neumann (*).

6.° De même on obtiendra la fonction rationnelle $\overset{n}{S}(x)$ due à Schläfli (**), en posant

$$\overset{2p,0}{K}(x) = \overset{2p}{Y}(x) + \overset{2p}{S}(x), \quad \overset{2p+1,1}{K}(x) = \overset{2p+1}{Y}(x) + \overset{2p+1}{S}(x). \tag{15}$$

7.° Posons enfin

$$\overset{2p,0}{\mathfrak{K}}(x) = -\overset{2p}{T}(x), \quad \overset{2p+1,1}{\mathfrak{K}}(x) = -\overset{2p+1}{T}(x), \tag{16}$$

nous aurons immédiatement

$$2\left(D_\mu \overset{\mu}{\Psi}(x)\right)_{\mu=n} = \overset{n}{\Omega}(x) - \overset{n}{T}(x),$$

d'où

$$\overset{n}{T}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi. \tag{16$_a$}$$

La fonction entière $\overset{n}{T}(x)$, dont on obtient, en vertu de (8), (8_a) du § 16, le développement en série de puissances, a été introduite également par Schläfli (***) qui a donné aussi la formule (16_a).

Or, combinant les formules (9) du § 16 et (15), (16) de ce paragraphe, on aura la formule bien connue

$$\overset{n}{Y}(x) = 2\overset{n}{J}(x)\log\frac{x}{2} + 2\overset{n}{\mathfrak{J}}(x) + \overset{n}{T}(x) - \overset{n}{S}(x). \tag{17}$$

(*) *Theorie der Bessel'schen Functionen.* Leipsic, 1867.

(**) *Mathematische Annalen*, t. 3, p. 139 (1871).

(***) Loc. cit., p. 147 [la fonction $\overset{\mu}{T}(x)$ est désignée par $\overset{\mu}{H}(x)$].

Cette introduction des fonctions $\overset{n}{S}(x)$, $\overset{n}{T}(x)$ est beaucoup plus naturelle que celle habituellement appliquée. En effet, elle se présente, par ce point de vue, comme une conséquence irrésistible de l'identité (9) du § 16.

Notre introduction même des fonctions $\overset{n}{O}(x)$, $\overset{n}{S}(x)$, $\overset{n}{T}(x)$ permet de déduire immédiatement, à l'aide des formules générales, les formules fondamentales auxquelles ces fonctions doivent satisfaire. Or, les recherches de la section IX nous fourniront un moyen plus simple pour trouver ces mêmes formules.

§ 18. Appliquons maintenant la fonction $\overset{\mu,\mu+\nu}{\Pi}(x)$ pour trouver le développement en série infinie selon la formule (2) du § 10, nous aurons, après avoir posé $\nu - \mu$ au lieu de ν:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+s} \overset{\mu+s}{J}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)} = \\ &= \frac{x}{2}\left(\overset{\mu}{J}(x)\,\overset{\mu-1,\nu-1}{\Pi}(x) - \overset{\mu-1}{J}(x)\,\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)\right). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Appliquons de même la fonction $\overset{\mu,\nu}{\Psi}(x)$, et additionnons la formule correspondante à celle que nous en obtiendrons en changeant le signe de x, nous aurons, en vertu de la formule *eulérienne* pour le produit $\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin\pi(\mu-\nu)}{2\pi} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\mu+2s)\,\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+s+1\right)} \cdot \overset{\mu+2s}{J}(x) = \\ &= \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-1}\left(\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)\,\overset{\mu-1}{J}(x) - \overset{\mu-1,\nu+1}{\Pi}(x)\,\overset{\mu}{J}(x)\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Les séries analogues contenant la fonction cylindrique générale ne seront pas convergentes.

Posons maintenant dans (18), (19) $\nu + 1$ au lieu de ν, nous aurons les

deux formules que voici

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+3}{2}+s\right)}\cdot\overset{\mu+s}{J}(x)=\\
&\qquad=\overset{\mu-1,\nu}{\Pi}(x)\overset{\mu}{J}(x)-\overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x)\overset{\mu-1}{J}(x),\\
&\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\cdot\frac{\sin\pi(\mu-\nu)}{2\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\mu+2s+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2}+s\right)}\cdot\overset{\mu+2s}{J}(x)=\\
&\qquad=\overset{\mu-1,\nu}{\Pi}(x)\overset{\mu}{J}(x)-\overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x)\overset{\mu-1}{J}(x),
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

qui donneront pour la fonction qui figure au second membre deux développements différents selon les fonctions cylindriques. Cependant ces formules (20) ne sont démontrées que si nous supposons ν indépendant de μ, il est vrai; or, abstraction faite du facteur $x^{\mu+\nu}$, les deux membres des formules représentent quatre fonctions entières de x, μ, ν, de sorte qu'il est évident que nos formules gardent leur validité même si l'on suppose ν égal à une fonction quelconque de μ.

Les deux séries infinies qui figurent aux premiers membres de (20) possèdent une propriété remarquable que nous démontrerons aisément à l'aide de la formule (2_a) du § 14. En effet, désignons par $\overset{\mu,\nu}{\sigma}(x)$ la somme commune des deux séries, nous aurons, p étant un positif entier:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\mu,\nu+2p}{\sigma}(x)=\overset{\mu,\nu}{\sigma}(x)+\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\cdot\\
&\cdot\left[\overset{\mu-1}{J}(x)\cdot\sum_{s=0}^{s=p-1}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s+1}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+3}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+3}{2}+s\right)}-\right.\\
&\left.-\overset{\mu}{J}(x)\cdot\sum_{s=0}^{s=p-1}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+3}{2}+s\right)}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Posant $\nu = 0$, on retombe, pour la deuxième série, dans une formule due à M. Lommel (*).

Regardons encore pour les séries (18), (19) les cas particuliers suivants, où p désigne un entier non négatif:

1.° $\mu \pm \nu = \pm (2p + 1)$, il faut introduire la fonction $\overset{\mu}{Z}(x)$.

2.° $\nu = \mu - 2p$, il faut différentier par rapport à ν, opération qui introduit la fonction K.

3.° $\nu = \mu + 2p$; dans ce cas la série qui entre dans la formule (19) deviendra une série finie, de sorte que nous aurons la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^p \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s (\mu + 2s) \overset{\mu+2s}{J}(x)}{(p-s)!\,\Gamma(\mu + p + s + 1)} = \\ &= \overset{\mu}{J}(x) \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-2p}}{(p+s)!\,\Gamma(\mu + p + s + 1)} - \\ &- \overset{\mu-1}{J}(x) \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-2p+1}}{(p+s)!\,\Gamma(\mu + p + s + 1)} . \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

4.° $\nu = -\mu$, ce qui donnera les formules remarquables

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu + 1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^s}{s!} \overset{\mu+s}{J}(x), \tag{23}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\mu = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\mu + 2s)\,\Gamma(\mu + s)}{s!} \overset{\mu+2s}{J}(x); \tag{24}$$

posant dans (24) μ égal à un entier non négatif, on retombe dans une formule donnée pour la première fois par M. Schlömilch (**). Les hypothèses $\nu = -\mu \pm 2p$ nous conduiront aussi aux formules (22), (23) ou (24).

5.° $\nu = 0$; la formule (19) et la première (20) se présentent sous une forme très élégante.

§ 19. Appliquons maintenant la formule (5) du § 12, nous aurons,

(*) *Studien über die Bessel'schen Functionen*, p. 37. Leipsic, 1868.

(**) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. 2, p. 141 (1857).

en vertu de (4) du § 15:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\cdot\int\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\overset{\mu}{C}(x)\,d\,x=\\=\frac{x}{2}\left(\overset{\mu}{C}(x)\overset{\mu-1,\nu}{\Pi}(x)-\overset{\mu-1}{C}(x)\overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x)\right),\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

formule qui est analogue à celle de M. Lommel (*).

De la formule générale (25) on peut en déduire une foule d'autres. Posons par exemple $\nu=\frac{1}{2}$, $\mu=-\frac{1}{2}$, tandis que la fonction cylindrique est celle de la première espèce, nous obtiendrons une nouvelle expression pour le sinus-intégral $S_i(x)$, expression qui est également due à M. Lommel (**). Regardons encore les cas particuliers suivants, où p désigne un entier non négatif:

1.° $\nu=\mu\pm 2p$. Le facteur $\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)$ peut être supprimé, de sorte que le second membre de la formule nouvelle contiendra la fonction $\overset{\mu}{Z}(x)$.

2.° $\nu=\mu-(2p+1)$. Une différentiation par rapport à ν donnera

$$\frac{p\,!}{\Gamma(\mu-p)}\int\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-2p-1}\overset{\mu}{C}(x)\,d\,x=\frac{x}{2}\left(\overset{\mu}{C}(x)\overset{\mu-1,\mu-2p-1}{K}(x)-\overset{\mu-1}{C}(x)\overset{\mu,\mu-2p}{K}(x)\right).\tag{26}$$

Les formules que l'on en obtiendra, en posant $\mu=2p+1$ ou $\mu=2p+2$, contiennent les fonctions $\overset{\mu}{S}(x)$ ou $\overset{\mu}{O}(x)$ respectivement; la dernière est due à M. Lommel (***).

Posons maintenant $\mu=\nu$, ν étant un entier égal à p au plus, la formule (26) deviendra de nouveau inappliquable, de sorte qu'il faudra différentier encore une fois par rapport à μ. Démontrons qu'il suffit de regarder seulement le cas $0\leq\nu\leq p$. En effet, supposons μ négatif entier, égal à $-s$, nous aurons

$$\int\left(\frac{x}{2}\right)^{-s-2p-1}\overset{-s}{C}(x)\,d\,x=(-1)^{s}\int\left(\frac{x}{2}\right)^{-s-2p-1}\overset{s}{C}(x)\,d\,x,$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. 9, p. 442 (1876).
(**) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 204 (1880).
(***) *Mathematische Annalen*, t. 9, p. 442.

et l'intégrale qui figure au second membre peut être déduite de (26), en y posant $\mu = s$ et $p + s$ au lieu de p.

3.° $\nu = -\mu - (2p + 1)$. Ce cas peut être réduit au précédent. Posons en effet dans 2° $\cos \mu \pi \overset{-\mu}{C}(x)$ au lieu de $\overset{\mu}{C}(x)$, puis supprimons le facteur commun $\cos \pi \mu$ et changeons le signe de μ, nous aurons la formule cherchée.

La formule correspondante pour $\mu = \nu = -\frac{1}{2}$ donnera une expression nouvelle pour le cosinus-intégrale; cette expression appartient aussi à M. Lommel (*).

4.° $\nu = \mu + 2p + 1$. Nous aurons la formule remarquable

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(-1)^{p-1}}{p!\,\Gamma(\mu + p + 1)} \cdot \int \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu + 2p + 1} \overset{\mu}{C}(x)\, dx = \\ &= \overset{\mu-1}{C}(x) \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu + 2s + 1}}{s!\,\Gamma(\mu + s + 1)} - \overset{\mu}{C}(x) \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu + 2s}}{s!\,\Gamma(\mu + s)} \,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

5.° $\nu = -\mu + 2p + 1$. Ce cas peut être réduit au précédent.

§ 20. Pour développer en série de fonctions cylindriques notre intégrale (25), appliquons la formule (6) du § 12, ce qui donnera

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}\right)} \cdot \int \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \overset{\mu}{J}(x)\, dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{s + \nu + 1}}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 3}{2} + s\right)} \cdot \overset{\mu+s}{J}(x), \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Gamma\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}\right)} \cdot \int \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \overset{\mu}{J}(x)\, dx = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu + 2s + 1)\,\Gamma\left(\frac{\mu - \nu + 1}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + 3}{2} + s\right)} \overset{\mu+2s+1}{J}(x), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

formules qui nous fourniront un moyen pour développer en série de fonctions cylindriques un nombre de fonctions, et cela de deux manières différentes. Nous nous bornerons à regarder les cas suivants:

(*) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 204 (1880).

1.° $\nu = \frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2}$ ou $\nu = \mu = \frac{1}{2}$. Les intégrales se réduiront à $\sin x$ ou à $\cos x$ respectivement.

2.° $\nu = 0$. La dernière des formules se présente sous une forme très élégante; elle peut être trouvée dans le livre de MM. Gray et Matthews (*). Posant en outre $\mu = \pm \frac{1}{2}$, on aura deux développements pour chacune des fonctions

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}} d\, x\,, \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}} d\, x.$$

3.° $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$. On obtient deux développements pour $S_i(x)$.

4.° $\nu = -\mu - 2p - 1$. Dans ce cas il faut différentier par rapport à ν. Les formules ainsi obtenues se simplifieront par une application des formules (23), (24) du § 18. Posant $p = 0$, $\mu = \frac{1}{2}$, on aura deux développements pour $C_i(x)$.

V. Sur les fonctions introduites par $\int x^\nu e^{-ix} \overset{\mu}{C}(x)\, d\, x$.

§ 21. Dans ce cas nous regardons la fonction

$$y = (2\, i\, x)^\nu e^{-ix},$$

ce qui donnera

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = 4\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2\, i\, x)^{\nu-1} e^{-ix} - 4\,(\nu^2 - \mu^2)\,(2\, i\, x)^{\nu-2} e^{-ix},$$

équation qui nous conduira naturellement à poser

$$\overset{\mu,\nu}{\omega}(x) = \frac{2\, i\, e^{-ix}}{i^\mu \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)(2\, i\, x)^\nu}{\Gamma(\nu + \mu)\, \Gamma(\nu - \mu)}, \tag{1}$$

de sorte que nous aurons pour la fonction correspondante $\overset{\mu,\nu}{B}(x)$ cette formule

(*) *Treatise on Bessel Functions*, p. 209.

fondamentale:

$$\overset{\mu,\nu+1}{B}(x) = \overset{\mu,\nu}{B}(x) - \frac{e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\nu}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma(\nu-\mu+1)}, \tag{2}$$

ou plus généralement, n étant un positif entier:

$$\overset{\mu,\nu+n}{B}(x) = \overset{\mu,\nu}{B}(x) - \frac{e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+\mu+s+1)\,\Gamma(\nu-\mu+s+1)}; \tag{2_a}$$

posant $\nu - n$ au lieu de ν, on aura une formule analogue pour la réduction de $\overset{\mu,\nu-n}{B}(x)$ à $\overset{\mu,\nu}{B}(x)$. Faisons dans (2_a) n croître au delà de toute limite, nous aurons la fonction

$$\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x) = \frac{e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+\mu+s+1)\,\Gamma(\nu-\mu+s+1)} \tag{3}$$

comme la plus simple des fonctions $\overset{\mu,\nu}{B}(x)$.

On aura de même

$$u_{\mu} = \frac{2\,\nu-1}{\nu+\mu}\left(\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x) - \overset{\mu,\nu-1}{\Phi}(x)\right),$$

$$v_{\mu} = \frac{2\,\nu-1}{\nu+\mu}\left(\overset{\mu,\nu-1}{\Phi}(x) - \overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)\right),$$

d'où, en vertu de (3)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) + \overset{\mu}{g}(x)\right) &= \frac{2\,e^{-ix}}{i^{\mu+1}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+\mu)\,\Gamma(\nu-\mu+1)}, \\ \frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) - \overset{\mu}{g}(x)\right) &= \frac{2\,e^{-ix}}{i^{\mu+1}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\,\Gamma(\nu-\mu)}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ce qui donnera immédiatement les équations correspondantes à (1), (2) du § 4 auxquelles $\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)$ doit satisfaire. Nous ne nous arrêtons pas à la fonction $\overset{\mu,\nu+\mu}{\Phi}(x)$.

Posons $\nu = -p - \frac{1}{2}$, p étant un entier non négatif, la définition de $\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)$ est en défaut. Dans ce cas on peut regarder la fonction

$$\lim_{\nu=-p-\frac{1}{2}} \left[\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)\right],$$

qui se présente sous forme d'une série finie multipliée par e^{-ix}.

§ 22. Nous avons encore à montrer comment de la fonction $\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)$ on peut tirer des fonctions analogues à celles que nous avons étudiées dans les §§ 16, 17. En effet, regardons les cas particuliers suivants:

1.° $\nu = 0$. On aura

$$\overset{\mu,0}{\Phi}(x) = \overset{\mu}{\Phi}(x) = \frac{i^{-\mu}}{\pi} \int_0^\pi e^{xi\cos\omega} \cos(\mu\,\omega)\, d\,\omega; \tag{5}$$

pour une valeur entière de μ on retombe dans l'intégrale pour $\overset{\mu}{J}(x)$, donnée par M. C. Neumann (*).

2.° $\nu = \pm\mu - p$, p étant un entier non négatif. Nous verrons que la fonction $\overset{\mu}{\omega}(x)$ correspondante s'évanouira, de sorte que $\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)$ se réduira à une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre μ. Cherchons le coefficient de $x^{\pm\mu}$, nous aurons

$$\overset{\mu,\mu-p}{\Phi}(x) = \overset{\mu}{J}(x), \quad \overset{\mu,-\mu-p}{\Phi}(x) = i^{-2\mu}.\overset{-\mu}{J}(x), \tag{6}$$

ce qui donnera, en vertu de (3), le développement connu de $\overset{\mu}{J}(x).e^{\pm ix}$; pour $\mu = 0$ il appartient à Bessel (**).

Posons encore

$$\overset{\mu,\nu}{M}(x) = 2\,D_\nu \overset{\mu,\nu}{\Phi}(x), \quad \overset{\mu,\nu}{\mathfrak{M}}(x) = 2\,D_\mu \overset{\mu,\nu}{\Phi}(x), \tag{7}$$

(*) *Theorie der Bessel'schen Functionen*, p. 8.

(**) *Abhandlungen der kgl. Akademie in Berlin*, 1824, p. 39.

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\mu,\mu}{M}(x) = 2\log(2\,i\,x)\overset{\mu}{J}(x) + \\
&+ \frac{2\,e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\mu+s+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\mu+s}}{s\,!\,\Gamma(2\,\mu+s+1)} \left[\psi\left(\mu+s+\frac{1}{2}\right) - \right. \\
&\left. - \psi(2\,\mu+s+1) - \psi(s+1)\right], \\
&\overset{\mu,\mu}{\mathfrak{M}}(x) = -2\log i\,\overset{\mu}{J}(x) + \\
&+ \frac{2\,e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\mu+s+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^{\mu+s}}{s\,!\,\Gamma(2\,\mu+s+1)} \Big(\psi(s+1) - \psi(2\,\mu+s+1)\Big),
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

et plus généralement

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\mu,\mu-p}{M}(x) = \overset{\mu,\mu}{M}(x) + \\
&+ \frac{(-1)^p\,2\,e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{(-1)^s(p-s-1)\,!\,\Gamma\left(\mu-p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\,\mu-p+s+1)} (2\,i\,x)^{\mu+s-p}, \\
&\overset{\mu,\mu-p}{\mathfrak{M}}(x) = \overset{\mu,\mu}{\mathfrak{M}}(x) - \\
&- \frac{(-1)^p\,2\,e^{-ix}}{i^{\mu}\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{(-1)^s(p-s-1)\,!\,\Gamma\left(\mu-p+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\,\mu-p+s+1)} (2\,i\,x)^{\mu+s-p},
\end{aligned}\right\} \quad (8_a)$$

d'où

$$\overset{\mu,\mu-p}{M}(x) + \overset{\mu,\mu-p}{\mathfrak{M}}(x) = 2\,D_{\mu}\,\overset{\mu}{J}(x), \quad (9)$$

formule qui est entièrement analogue à (9) du § 16; on aura de même

$$\left.\begin{aligned}
\overset{\mu,-\mu-p}{M}(x) &= i^{-2\mu}\,\overset{-\mu,-\mu-p}{M}(x), \\
\overset{\mu,-\mu-p}{\mathfrak{M}}(x) &= i^{-2\mu}\,\overset{-\mu,-\mu-p}{\mathfrak{M}}(x).
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

§ 23. Posons maintenant $\mu = r$, r étant un entier qui satisfait à l'inégalité $2\,r \leqq p$, la fonction ω correspondante à $\overset{r,r-p}{M}(x)$ s'évanouira, de sorte que

la fonction M se réduira à une fonction cylindrique de l'argument x et du paramètre r. Déterminant le coefficient de x^r dans la fonction en question, on aura

$$\overset{r,r-p}{M}(x) = \pi \overset{r}{J}(x) + \overset{r}{Y}(x), \tag{11}$$

ce qui donnera, pourvu que $2r > p$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{r,r-p}{M}(x) &= \pi \overset{r}{J}(x) + \overset{r}{Y}(x) + \\ + \frac{(-1)^r 2 e^{-ix}}{\sqrt{\pi}} &\sum_{s=0}^{s=2r-p-1} \frac{\Gamma\left(s-r+\frac{1}{2}\right)(2r-s-1)!}{i^s \cdot s!} \left(\frac{1}{2x}\right)^{r-s}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Il nous reste encore de montrer que les fonctions M, $\mathfrak{M}$ donneront un système de fonctions entièrement analogues aux fonctions dites *besséliennes* de la deuxième espèce les quelles nous avons étudiées dans le § 17. Nous désignons ces fonctions nouvelles par les lettres gothiques correspondantes aux lettres romaines appliquées pour les autres fonctions.

Posons en premier lieu

$$\overset{p,1}{M}(x) = \pi \overset{p}{J}(x) + \overset{p}{Y}(x) + \frac{4}{p} \overset{p}{\mathfrak{O}}(x), \tag{13}$$

nous avons, en vertu de (12):

$$\overset{p}{\mathfrak{O}}(x) = \frac{p}{4} e^{-ix} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} i^s (p-s-1)! \binom{2p-s-1}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-s}. \tag{13$_a$}$$

La fonction $\overset{p}{\mathfrak{O}}(x)$ est complètement analogue à $\overset{p}{O}(x)$ de M. C. Neumann.

Posons ensuite

$$\overset{p,0}{M}(x) = \pi \overset{p}{J}(x) + \overset{p}{Y}(x) + \overset{p}{\mathfrak{S}}(x), \tag{14}$$

nous aurons de même

$$\overset{p}{\mathfrak{S}}(x) = e^{-ix} \cdot \sum_{s=0}^{s=p-1} i^s (p-s-1)! \binom{2p-s-1}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-s}. \tag{14$_a$}$$

ou bien

$$\overset{p}{\mathfrak{S}}(x) = e^{-ix}\left(\overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x) + i \overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)\right), \tag{14$_b$}$$

où $\overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x)$ désigne la somme des termes contenant les puissances paires de i, tandis que $\overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)$ est la somme des autres termes de la série finie qui figure

au second membre de (14_a). La fonction $\overset{p}{\mathfrak{S}}(x)$ est entièrement analogue à $\overset{p}{S}(x)$ de Schläfli. Dans les recherches de la section VII nous retrouvons de même les fonctions $\overset{p}{\mathfrak{O}}(x)$, $\overset{p}{\mathfrak{S}}(x)$.

Posons enfin

$$\overset{p,0}{\mathfrak{M}}(x) = -\pi \overset{p}{J}(x) - \overset{p}{\mathfrak{J}}(x), \tag{15}$$

$\overset{p}{\mathfrak{J}}(x)$ sera une fonction entière, dont on aura immédiatement, à l'aide de (8), (8_a), la série de puissances; les coefficients de cette série sont des nombres rationnels. Différentiant maintenant par rapport à μ la formule (5) du § 22, posant ensuite $\mu = p$, on aura

$$\overset{p}{\mathfrak{J}}(x) = \frac{2}{\pi i^p} \int_0^\pi \omega \, e^{xi\cos\omega} \sin p\,\omega \, d\,\omega, \tag{15_a}$$

intégrale qui est complètement analogue à celle de (14_a) du § 17.

Cela posé, la formule (9) nous donne

$$\overset{p}{Y}(x) = 2\left(D_\mu \overset{\mu}{J}(x)\right)_{\mu=p} + \overset{p}{\mathfrak{J}}(x) - \overset{p}{\mathfrak{S}}(x), \tag{16}$$

qui est entièrement analogue à la formule (17) donnée au § 17, de sorte que nous aurons en outre la formule

$$\overset{p}{T}(x) - \overset{p}{\mathfrak{J}}(x) = \overset{p}{S}(x) - \overset{p}{\mathfrak{S}}(x). \tag{17}$$

Les formules développées dans ce paragraphe montrent, ce me semble, que les fonctions $\overset{p}{\mathfrak{O}}(x)$, $\overset{p}{\mathfrak{S}}(x)$, $\overset{p}{\mathfrak{J}}(x)$ méritent d'être désignées, aussi bien que les fonctions $\overset{p}{O}(x)$, $\overset{p}{S}(x)$, $\overset{p}{T}(x)$, comme fonctions *besséliennes* de la deuxième espèce. Du reste, l'analogie entre ces deux systèmes de fonctions peut être poussée encore plus loin, nous le verrons au § 42.

§ 24. Les formules (16), (17) nous donnent lieu à certaines méditations sur les fonctions qui y entrent.

En effet, supposons x réel, la partie imaginaire de $\overset{p}{\mathfrak{S}}(x)$, c'ést-à-dire l'expression

$$-\overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x)\sin x + \overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)\cos x = \frac{1}{2}\overset{p}{\mathfrak{J}}(x) - \frac{(-1)^p}{2}\cdot \overset{p}{\mathfrak{J}}(-x)$$

doit représenter une fonction entière qui fait disparaître la partie imaginaire de $\overset{p}{\mathfrak{J}}(x)$, car les autres fonctions figurant dans (16) sont des fonctions réelles.

De même, la différence de $\overset{p}{S}(x)$ et de la partie réelle de $\overset{p}{\mathfrak{S}}(x)$, c'est-à-dire l'expression

$$\overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x)\cos x + \overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)\sin x - \overset{p}{S}(x) = \frac{1}{2}\overset{p}{\mathfrak{J}}(x) + \frac{(-1)^p}{2}\overset{p}{\mathfrak{J}}(-x) - \overset{p}{T}(x)$$

doit être aussi une fonction entière.

Il nous reste à démontrer que ces deux fonctions entières peuvent être représentées très élégamment à l'aide de deux intégrales définies. En effet, dans l'intégrale obtenue pour $\overset{p}{\mathfrak{J}}(-x)$ mettons $\pi-\omega$ au lieu de ω, nous aurons

$$(-1)^p\,\overset{p}{\mathfrak{J}}(-x) = \overset{p}{\mathfrak{J}}(x) - \frac{2}{i^p}\int_0^\pi e^{xi\cos\omega}\sin p\,\omega\,d\,\omega;$$

posons ensuite

$$\overset{p}{\Lambda}(x) = \frac{1}{i^{p-1}}\int_0^\pi e^{xi\cos\omega}\sin p\,\omega\,d\,\omega, \tag{18}$$

nous aurons

$$\overset{p}{\Lambda}(x) = \overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x)\sin x - \overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)\cos x = \frac{i}{2}\left(\overset{p}{\mathfrak{S}}(x) - (-1)^p\,\overset{p}{\mathfrak{S}}(-x)\right). \tag{18$_a$}$$

On aura de même

$$\overset{p}{\mathfrak{J}}(x) + (-1)^p\,\overset{p}{\mathfrak{J}}(-x) = -\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\cos\left(x\sin\omega - \frac{p\,\pi}{2}\right)\sin p\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)d\,\omega,$$

$$2\,\overset{p}{T}(x) = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\cos\left(x\sin\omega - \frac{p\,\pi}{2}\right)\sin p\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)d\,\omega,$$

de sorte que la fonction

$$\overset{p}{M}(x) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\sin\omega - \frac{p\,\pi}{2}\right)\sin p\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)d\,\omega \tag{19}$$

peut être représentée sous cette forme

$$\left.\begin{aligned}\overset{p}{M}(x) &= \overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x)\cos x + \overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)\sin x - \overset{p}{S}(x) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\overset{p}{\mathfrak{S}}(x) + (-1)^p\,\overset{p}{\mathfrak{S}}(-x)\right) - \overset{p}{S}(x).\end{aligned}\right\} \tag{19$_a$}$$

Les fonctions $\overset{p}{\Lambda}(x)$ et $\overset{p}{M}(x) + \overset{p}{S}(x)$ sont semblables aux fonctions $\overset{\pm\left(p+\frac{1}{2}\right)}{J}(x)$; elle sont aussi des généralisations des fonctions circulaires $\cos x$ et $\sin x$, car nous aurons la formule remarquable

$$\left(\overset{p}{\Lambda}(x)\right)^2 + \left(\overset{p}{M}(x) + \overset{p}{S}(x)\right)^2 = \left(\overset{p}{\mathfrak{S}}_1(x)\right)^2 + \left(\overset{p}{\mathfrak{S}}_2(x)\right)^2, \tag{20}$$

analogue à celle que M. Lommel (*) a démontrée pour la somme

$$\left(\overset{p+\frac{1}{2}}{J}(x)\right)^2 + \left(\overset{-p-\frac{1}{2}}{J}(x)\right)^2.$$

Pourvu que le paramètre p ne soit pas égal à un entier, on aura la formule

$$\overset{\mu}{\Lambda}(x) = \frac{\pi i}{\sin\mu\pi}\left(\overset{\mu}{\Phi}(-x) - \cos\mu\pi\,\overset{\mu}{\Phi}(x)\right), \tag{21}$$

entièrement analogue à celles exprimant les fonctions $\overset{\mu}{\Omega}(x)$ et $\overset{\mu}{Y}(x)$ à l'aide de $\overset{\mu}{\Psi}(x)$ et de $\overset{\mu}{J}(x)$ respectivement; voir (13_b) du § 17 et (δ) du § 1.

Regardons maintenant les seize fonctions données sous cette forme commune

$$\int_0^{\frac{\varepsilon\pi}{2}} f\left(x\,g\,(\omega)\right) h\,(\mu\,\omega)\,d\,\omega, \tag{α}$$

où ε est égal à 1 ou à 2, et où f, g, h peuvent être remplacés, d'une manière quelconque, par cosinus ou par sinus. À l'aide des formules (13_b) du § 17 et (21) de ce paragraphe on démontrera sans peine que chacune des intégrales (α) peut être écrite comme une fonction linéaire des deux fonctions

(*) *Mathematische Annalen*, t. 2, p. 631 (1870), t. 4, p. 109 (1871).

$\overset{\mu}{\Phi}(x)$, $\overset{\mu}{\Psi}(x)$. Supposant μ égal au nombre entier n, on obtient les intégrales en question exprimées d'une manière analogue à l'aide des quatre fonctions $\overset{n}{J}(x)$, $\overset{n}{\Omega}(x)$, $\overset{n}{\Lambda}(x)$, $\overset{n}{M}(x)$.

§ 25. Les séries infinies et les intégrales indéfinies obtenues à l'aide de la fonction $\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)$ sont entièrement analogues à celles que nous avons étudiées aux §§ 18, 19, 20. On les discutera de la même manière et on obtiendra par là une suite des formules complètement analogues aux précédentes. Nous nous bornerons à dire ici un mot sur la formule

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{i^s(\mu+s)\Gamma(\mu+s-\nu)}{\Gamma(\mu+\nu+s+1)} \overset{\mu+s}{J}(x) = \\ &= \frac{\pi x}{2\sin\pi(\mu-\nu)} \cdot \frac{i^\mu \sqrt{\pi}\, e^{ix}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\,i\,x)^\nu} \left(\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)\overset{\mu-1}{J}(x) - \overset{\mu-1,\nu}{\Phi}(x)\overset{\mu}{J}(x)\right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Posons $\nu = -\mu$, nous aurons, en appliquant (7) du § 22 et la formule fondamentale de M. Lommel, ce développement nouveau

$$(2\,i\,x)^\mu e^{ix} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{i^{\mu+s}(\mu+s)\Gamma(2\mu+s)}{s!} \cdot \overset{\mu+s}{J}(x), \quad (23)$$

formule qui nous donnera immédiatement les fonctions $\cos x$, $\sin x$ développées en séries de fonctions cylindriques.

§ 26. Il nous reste encore d'indiquer comment la fonction $\overset{\mu}{\Phi}(x)$ nous fournira un simple moyen pour l'étude de la fonction

$$K(x) = \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

intimement liée à la fonction célèbre introduite dans l'Analyse par Kramp (*); c'est pourquoi nous désignons plus bas notre fonction K comme *la transcendante de* Kramp.

Posons en effet dans la formule (5) du § 22 $\mu = \frac{1}{2}$, nous aurons, après

(*) *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, 1798.

une transformation simple de l'intégrale définie ainsi obtenue

$$\sqrt{i}\,\overset{\frac{1}{2}}{\Phi}(x) = \sqrt{\frac{2}{i x}} \cdot \frac{e^{ix}}{\pi} \cdot K(\sqrt{2 i x}), \tag{24}$$

de sorte que la formule (23) du § 25 nous donnera immédiatement ce développement nouveau

$$K(\sqrt{2 i x}) = e^{-ix} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{s+1} \overset{s+\frac{1}{2}}{J}(x). \tag{25}$$

De la définition même de $\overset{\mu}{\Phi}(x)$, on tire en outre

$$i^{\mu+\frac{1}{2}} \overset{\mu+\frac{1}{2}}{\Phi}(x) + i^{\mu-\frac{1}{2}} \overset{\mu-\frac{1}{2}}{\Phi}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{x i \cos\omega} \cos\mu\omega \,.\, \cos\frac{\omega}{2}\, d\omega;$$

cela posé, la formule

$$\int e^{x i \cos\omega} \cos\frac{\omega}{2}\, d\omega = \frac{2\, e^{ix}}{\sqrt{2 i x}} K\left(\sqrt{2 i x} \sin\frac{\omega}{2}\right) + A,$$

A étant une constante arbitraire, nous donnera, après une intégration par parties

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi K\left(\sqrt{2 i x} \sin\frac{\omega}{2}\right) \cos\mu\omega\, d\omega =$$

$$= \sqrt{\frac{x i}{2}} \cdot \frac{e^{-ix}}{\mu} \left(i^{\mu+\frac{1}{2}} \overset{\mu+\frac{1}{2}}{\Phi}(x) + i^{\mu-\frac{1}{2}} \overset{\mu-\frac{1}{2}}{\Phi}(x) \right),$$

formule qui nous fournira un moyen pour développer en série de Fourier la fonction $K\left(\sqrt{2 i x} \sin\frac{\omega}{2}\right)$. En effet, appliquant la méthode ordinaire, on aura

$$\left.\begin{aligned} K\left(\sqrt{2 i x} \sin\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\omega}{\pi} \cdot K\left(\sqrt{2 i x}\right) + \\ + \sqrt{\frac{x}{2}}\, e^{-ix} \,.\, \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{i^s}{s} &\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\Phi}(x) + i \overset{s+\frac{1}{2}}{\Phi}(x) \right) \sin s\omega, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

formule qui est valable dans l'intervalle $-\pi \leqq \omega \leqq +\pi$.

En prenant pour point de départ la formule

$$i^{\mu+\frac{1}{2}} \overset{\mu+\frac{1}{2}}{\Phi}(x) - i^{\mu-\frac{1}{2}} \overset{\mu-\frac{1}{2}}{\Phi}(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{xi\cos\omega} \sin\mu\,\omega \,.\, \sin\frac{\omega}{2}\, d\,\omega,$$

on aura de la même manière

$$K\left(\sqrt{-2\,i\,x}\cos\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{2}}\cdot e^{-ix}\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{i^{s-1}}{s}\left(\overset{s-\frac{1}{2}}{\Phi}(x) - i\overset{s+\frac{1}{2}}{\Phi}(x)\right)\cos s\,\omega, \tag{27}$$

formule qui est valable dans l'intervalle $-\pi < \omega < +\pi$.

Il est bien remarquable que les coefficients des deux séries de Fourier (26), (27) se réduisent d'une manière très simple à la transcendante K même. En effet, remarquant que l'on aura

$$\overset{-\frac{1}{2}}{\Phi}(x) = i\overset{\frac{1}{2}}{\Phi}(x),$$

on aura généralement, à l'aide de la formule (4) du § 11,

$$\overset{n+\frac{1}{2}}{\Phi}(x) = \left(\overset{-\frac{1}{2},\,n}{R}(x) - i\overset{\frac{1}{2},\,n-1}{R}(x)\right)\overset{\frac{1}{2}}{\Phi}(x) - \frac{2\,e^{-ix}}{\pi\,x\sqrt{i}}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1} i^s \overset{s+\frac{3}{2},\,n-s-1}{R}(x). \tag{28}$$

Les formules (26), (27) se simplifient si respectivement nous mettons $\mp\frac{ix}{2}$ au lieu de x.

L'hypothèse $\omega = \frac{\pi}{2}$ donnera, en vertu de (26), (27), deux développements nouveaux pour les fonctions $K(\sqrt{i\,x})$, $K(\sqrt{-i\,x})$.

VI. Sur les fonctions introduites par $\int x^\nu \overset{\varrho}{C}(x)\, \overset{\mu}{C_1}(x)\, d\,x$.

§ 27. En désignant par $\overset{\varrho}{C}(x)$ une fonction cylindrique quelconque de l'argument x et du paramètre ϱ, on verra par un calcul direct que la fonction

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \overset{\varrho}{C}(x)$$

satisfait à l'équation différentielle suivante:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y =$$

$$= \frac{\nu + \mu + \rho}{2} \cdot \frac{\nu - \mu + \rho}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu - 2} \overset{\rho}{C}(x) - \nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu - 1} \overset{\rho - 1}{C}(x).$$

Cela posé, les fonctions $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$, $\overset{\mu,\nu}{\Phi}(x)$, étudiées dans les deux sections précédentes, nous conduiront immédiatement à poser dans ce cas

$$\overset{\mu,\nu,\rho}{\omega}(x) = \frac{2\,\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi}{2} (\nu - \mu + \rho) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu - 1} \overset{\rho}{C}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + \rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu + \rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu - \rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu - \rho}{2}\right)}, \tag{1}$$

ce qui donnera pour notre fonction correspondante $\overset{\mu,\nu,\rho}{B}(x)$ cette première équation fondamentale

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\mu,\nu,\rho}{B}(x) - \overset{\mu,\nu+1,\rho+1}{B}(x) = \\ = \dfrac{\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi}{2} (\mu - \nu + \rho) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \overset{\rho}{C}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + \rho}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu + \rho}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu + \mu - \rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu - \rho}{2}\right)}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

formule qui nous fournira un moyen pour développer en série infinie la fonction $\overset{\mu,\nu,\rho}{\Pi}(x)$ qui est la plus simple des $\overset{\mu,\nu,\rho}{B}(x)$. A cet égard il faut trouver en premier lieu la limite $\overset{\mu,\nu+n,\rho+n}{B}(x)$, n étant un positif entier infiniment grand. Or, appliquant la formule

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n^x}{x(x+1) \ldots (x+n-1)},$$

et l'expression asymptotique pour les valeurs extrémement grandes de $\Re(\rho)$:

$$\lim . \overset{\rho}{C}(x) = \lim . \left(a(\rho) \overset{\rho}{J}(x) + b(\rho) \overset{\rho}{Y}(x)\right) = - \Gamma(\rho)\, b(\rho) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\rho},$$

on aura immédiatement

$$\lim_{n=+\infty} . \overset{\mu,\nu+n,\rho+n}{\omega}(x) = - b(\rho) \,.\, \frac{2 \cos \frac{\pi}{2} (\mu - \nu + \rho) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu - \rho - 1}}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu - \rho}{2}\right) \left(\Gamma \frac{\nu - \mu - \rho}{2}\right)},$$

d'où finalement

$$\left.\begin{aligned}\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) = -b(\rho)\overset{\mu,\nu-\varrho}{\Pi}(x) + \frac{\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+\rho)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\rho}{2}\right)}\cdot \\ \cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+s)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+s}\overset{\varrho+s}{C}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\rho}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\rho}{2}+s+1\right)},\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

où $\overset{\mu,\nu-\varrho}{\Pi}(x)$ est la fonction étudiée dans la section IV.

En effet, les résultats que nous venons d'indiquer montreront immédiatement que la série infinie qui figure au second membre de la formule (3) est absolument convergente pour toutes les valeurs finies des quatre variables x, μ, ν, ρ, la valeur $x = 0$ exceptée peut-être.

§ 28. Après avoir déterminé la fonction $\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x)$, nous aurons à démontrer que cette même fonction satisfait à deux autres équations fondamentales.

Appliquant en premier lieu l'identité

$$\overset{\varrho+1}{C}(x) + \overset{\varrho-1}{C}(x) = \frac{2\rho}{x}\overset{\varrho}{C}(x),$$

on aura immédiatement

$$\frac{\nu+\mu-\rho}{2}\cdot\frac{\nu-\mu-\rho}{2}\cdot\overset{\mu,\nu+1,\varrho-1}{\omega}(x) - \\ -\frac{\nu+\mu+\rho}{2}\cdot\frac{\nu-\mu+\rho}{2}\overset{\mu,\nu+1,\varrho+1}{\omega}(x) = \nu\rho\,\overset{\mu,\nu,\varrho}{\omega}(x),$$

ou, ce qui vaut autant

$$\frac{\nu+\mu-\rho}{2}\cdot\frac{\nu-\mu-\rho}{2}\overset{\mu,\nu+1,\varrho-1}{\Pi}(x) - \\ -\frac{\nu+\mu+\rho}{2}\cdot\frac{\nu-\mu+\rho}{2}\overset{\mu,\nu+1,\varrho+1}{\Pi}(x) = \nu\rho\,\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x).$$

Éliminant ensuite, à l'aide de (2), $\overset{\mu,\nu+1,\varrho+1}{\Pi}(x)$, on aura

$$\left.\begin{aligned}\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) + \overset{\mu,\nu+1,\varrho-1}{\Pi}(x) = \\ = \frac{\Gamma(\nu)\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+\rho)\left(\frac{x}{2}\right)\overset{\varrho}{C}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\rho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\rho}{2}+1\right)}.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Soustrayons maintenant les équations (2), (4), posons $\nu - 1$ au lieu de ν, $\rho + 1$ au lieu de ρ, nous aurons la formule cherchée

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) + \overset{\mu,\nu,\varrho+2}{\Pi}(x) = \\ &= \frac{(\rho+1)\,\Gamma(\nu)\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu+\rho)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\overset{\varrho+1}{C}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+\rho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\rho}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu-\rho}{2}\right)}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

qui peut servir à réduire la partie réelle de ρ, de sorte que notre fonction est connue pour toutes les valeurs finies de ρ, pourvu qu'elle le soit dans le cas $0 \leq \Re(\rho) < 2$.

Il peut être trouvé une formule analogue pour la réduction de $\Re(\nu)$; pour l'obtenir il faut simplement mettre dans (4) $\nu + 1$ au lieu de ν, $\rho + 1$ au lieu de ρ et soustrayer ensuite cette nouvelle équation de (2), ce qui donnera la formule cherchée

$$\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) - \overset{\mu,\nu+2,\varrho}{\Pi}(x) = \frac{x}{(\nu+\rho+\mu)(\nu+\rho-\mu)} \cdot \overset{\mu,\nu,\varrho}{\omega}(x) - \frac{x}{4}\,\overset{\mu,\nu+1,\varrho+1}{\omega}(x). \quad (6)$$

De cette formule on peut en déduire un nouveau développement en série infinie pour la fonction $\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x)$.

§ 29. Cherchons maintenant les fonctions correspondantes $\overset{\mu}{f}(x)$, $\overset{\mu}{g}(x)$. Appliquant à cet égard la formule

$$D_x \overset{\varrho}{C}(x) = \frac{\rho}{x}\overset{\varrho}{C}(x) - \overset{\varrho+1}{C}(x),$$

on aura immédiatement

$$\frac{\mu}{x}\overset{\mu-1,\nu,\varrho}{\omega}(x) - D_x \overset{\mu-1,\nu,\varrho}{\omega}(x) = \frac{2\nu-2}{\nu-\mu-\rho-1}\overset{\mu,\nu-1,\varrho}{\omega}(x) - \frac{\nu+\mu+\rho-1}{\nu-\mu-\rho-1}\overset{\mu,\nu,\varrho+1}{\omega}(x),$$

d'où

$$v_\mu = \frac{2\nu-2}{\nu-\mu-\rho-1}\overset{\mu,\nu-1,\varrho}{\Pi}(x) - \frac{\nu+\mu+\rho-1}{\nu-\mu-\rho-1}\overset{\mu,\nu,\varrho+1}{\Pi}(x) - \overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x),$$

de sorte que la formule (2) du § 27 donnera

$$\frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) - \overset{\mu}{g}(x)\right) = \overset{\mu+1,\nu-1,\varrho}{\Pi}(x) - \overset{\mu+1,\nu,\varrho}{\Pi}(x) - \frac{1}{2\nu}\overset{\mu,\nu,\varrho}{\omega}(x). \quad (7)$$

On aura de la même manière

$$\frac{1}{x}\left(\overset{\mu}{f}(x) + \overset{\mu}{g}(x)\right) = -\overset{\mu-1,\nu+1,\varrho}{\Pi}(x) + \overset{\mu-1,\nu,\varrho}{\Pi}(x) - \frac{1}{2\nu}\overset{\mu,\nu,\varrho}{\omega}(x). \tag{8}$$

Cela posé, nous aurons, après une légère modification, les formules fondamentales suivantes:

$$\overset{\mu-1,\nu,\varrho}{\Pi}(x) - \overset{\mu+1,\nu,\varrho}{\Pi}(x) = 2\,D_x \overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) - \frac{1}{\nu+1}\overset{\mu,\nu+1,\varrho}{\omega}(x), \tag{9}$$

$$\overset{\mu-1,\nu,\varrho}{\Pi}(x) + \overset{\mu+1,\nu,\varrho}{\Pi}(x) = \frac{2\mu}{x}\overset{\mu,\nu+1,\varrho}{\Pi}(x), \tag{10}$$

qui sont complètement analogues aux formules (5) du § 15.

Nous renonçons à l'étude des fonctions $\overset{\mu,\nu+\mu,\varrho}{\Pi}(x)$, $\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) + \overset{\mu,\nu+1,\varrho}{\Pi}(x)$; au contraire, pour la fonction

$$\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Phi}(x) = -\frac{\pi}{\sin\pi(\mu+\rho)}\cdot\overset{\mu,\nu,\varrho+\mu}{\Pi}(x)$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\mu-1,\nu,\varrho}{\Phi}(x) + \overset{\mu+1,\nu,\varrho}{\Phi}(x) = \frac{2\mu}{x}\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Phi}(x) + \\ &+ \frac{2(\rho+2\mu)\cos\frac{\pi}{2}(\mu+\rho)\sin\pi(\mu+\rho)\,\Gamma(\nu)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}\overset{\rho+\mu}{C}(x)}{\pi\Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}+\mu+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\rho}{2}-\mu+1\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

§ 30. Posons $\nu = \pm\mu \pm \rho - 2p$, p étant un entier non négatif, la fonction ω sévanouira, c'est-à-dire que la fonction Π doit satisfaire à l'équation différentielle des fonctions cylindriques de l'argument x et du paramètre μ, ou ce qui vaut autant, nous aurons

$$\Pi = p(\mu)\overset{\mu}{J}(x) + q(\mu)\overset{\mu}{Y}(x),$$

$p(\mu), q(\mu)$ étant deux fonctions convenables de μ.

Dans les cas en question on déterminera aisément la valeur de notre fonction Π de la manière suivante:

1.° $\nu = \mu + \rho - 2p$: $\Pi = -b(\rho)\cos\pi\rho\,\overset{\mu}{J}(x)$.

2.° $\nu = -\mu + \rho - 2p$: $\Pi = -b(\rho)\cos\pi(\mu-\rho)\,\overset{-\mu}{J}(x)$.

3.° $\nu = \mu - \rho - 2p$. Le second membre de (3) se décompose en deux parties différentes dont la première se présente comme une série de puissan-

ces positives de $\frac{x^2}{4}$ multipliée par $\left(\frac{x}{2}\right)^\mu$, tandis que la dernière est un produit d'une série de puissances négatives de $\frac{x^2}{4}$ et de $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-\rho}$. Or, la formule ($\alpha$) n'est possible que si la deuxième partie indiquée s'évanouirait, ce qui donnera, pour $p=0$:

$$\overset{\mu,\mu-2\rho}{\Pi}(x) = \Gamma(1+\rho)\,.\cos\pi\rho\,.\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\binom{\rho-\mu}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-\rho-s}}{\Gamma(\mu+s+1)}\overset{-\rho-s}{J}(x). \tag{12}$$

En outre, cherchant dans la première partie le coefficient de $\left(\frac{x}{2}\right)^\mu$, on aura

$$\Pi = -\frac{\sin 2\pi\rho}{\pi}\Big(a(\rho)+\pi\, b(\rho)\cot\pi\rho\Big)\overset{\mu}{J}(x), \tag{13}$$

ce qui donnera ce développement

$$\overset{\mu}{J}(x) = \Gamma(1+\rho)\,.\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\binom{\rho-\mu}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu-\rho+s}}{\Gamma(\mu+s+1)}\overset{\rho+s}{J}(x). \tag{14}$$

4.° $\nu = -\mu-\rho-2p$. On aura de la même manière

$$\Pi = -\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\Big(a(\rho)+\pi\, b(\rho)\cot\pi\rho\Big)\cos\pi(\mu+\rho)\overset{-\mu}{J}(x) \tag{15}$$

et en outre deux développements en série analogues à (12), (14).

Posons maintenant dans (14) $\rho=\mu+r$, r étant un positif entier, nous aurons la formule remarquable

$$\overset{\mu}{J}(x) = \Gamma(\mu+r+1)\,.\sum_{s=0}^{s=r}\frac{(-1)^\rho\binom{r}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho-r}}{\Gamma(\mu+s+1)}\overset{\mu+r+s}{J}(x). \tag{16}$$

Or, comme je l'ai fait voir dans un Mémoire précédent (*), un pourra dans cette formule (16) remplacer la fonction $\overset{\mu}{J}(x)$ par une fonction quelconque satisfaisant à la duxième équation fondamentale des fonctions cylindriques, savoir:

$$\frac{2\mu}{x}\overset{\mu}{F}(x) = \overset{\mu-1}{F}(x) + \overset{\mu+1}{F}(x).$$

(*) *Annali di Matematica*, 3e série, t. V, p. 24.

Cela posé, mettons $\cos\mu\pi \overset{-\mu}{J}(x)$, au lieu de $\overset{\mu}{J}(x)$, supprimons le facteur commun $\cos\mu\pi$, nous aurons, en changeant le signe de μ, et en appliquant une formule *eulérienne* bien connue:

$$(-1)^r \Gamma(\mu - r) \overset{\mu}{J}(x) = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{r}{s} \Gamma(\mu - r + s) \left(\frac{2}{x}\right)^s \overset{\mu-2r+s}{J}(x), \tag{17}$$

formule qui nous sera bien utile plus bas.

Regardons les dérivées de $\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x)$ prises par rapport ou à ν ou à μ, posons ensuite $\nu = \pm\mu \pm \rho - 2p$, nous aurons un développement nouveau de $\overset{\mu}{Y}(x)$ analogue à ceux donnés aux §§ 17, 23, et nous aurons en outre un système de fonction analogues à $\overset{\mu}{O}(x)$, $\overset{\mu}{S}(x)$, $\overset{\mu}{T}(x)$ ou à $\overset{\mu}{\mathfrak{O}}(x)$, $\overset{\mu}{\mathfrak{S}}(x)$, $\overset{\mu}{\mathfrak{T}}(x)$ étudiées dans les paragraphes susdits. Cependant, nous n'approfondirons pas ici ces questions qui présentent un grand nombre de détails comme l'indiquent nos recherches dans ce paragraphe.

§ 31. Appliquons les formules générales (2) du § 10 et (5) du § 12, la fonction $\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x)$ nous fournira un moyen pour l'étude des intégrales indéfinies et des séries infinies correspondantes, étude qui est entièrement analogue à celle que nous avons accomplie dans les §§ 18, 19, 20. Nous nous bornerons à donner ce développement:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin\pi(\mu - \nu + \rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu - \mu - \rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu + \mu - \rho}{2}\right)} \cdot \\ &\cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\mu + \rho + 2s)\,\Gamma\left(\frac{\mu - \nu + \rho}{2} + s\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu + \mu + \rho}{2} + s + 1\right)} \overset{\mu+s}{J}(x) \overset{\varrho+s}{J}(x) = \\ &- \frac{\pi}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\rho-1}} \cdot \left(\overset{\mu}{J'}(x) \overset{\mu-1,\nu,\varrho-1}{\Pi}(x) + \overset{\mu-1}{J}(x) \overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x)\right), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

obtenu immédiatement à l'aide de (11) du § 29, en posant $\rho - \mu$ au lieu de ρ; la fonction Π est celle qui correspond à la fonction cylindrique $\overset{\varrho}{J}(x)$.

Posons maintenant $\nu = -\mu - \rho$, la formule (18) nous donnera, en vertu

de (15) du § 30, ce développement:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\rho}}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\rho+1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mu+\rho+2s}{\mu+\rho+s} \binom{\mu+\rho+s}{s} \overset{\mu+s}{J}(x) \overset{\rho+s}{J}(x). \qquad (19)$$

Dans le cas $\rho = p$, $\mu = q$, p et q étant deux positifs entiers, on retombe dans les formules données pour la première fois par M. Lommel (*).

Remarquons en passant que les fonctions $\overset{\mu,\nu,\varrho}{\Pi}(x) + \overset{\mu,\nu+1,\varrho}{\Pi}(x)$ et $\overset{\mu,\nu+\mu,\varrho}{\Pi}(x)$ nous donnent deux développement analogues à (19).

DEUXIÈME PARTIE.

Séries neumanniennes de la première espèce. Applications.

VII. Développements d'une série de Laurent selon les fonctions cylindriques.

§ 32. Dans les §§ 18, 30 nous avons donné ou indiqué *cinq* développements différents d'une puissance quelconque de x selon les fonctions cylindriques. Or, appliquant la théorie fondamentale des séries à double entrée, on pourra obtenir, comme l'a fait voir dans un cas particulier M. Pincherle (**), de chacune de ces formules un développement correspondant selon les fonctions cylindriques d'une série de puissances positives ou même d'une série de Laurent. Tous ces développements sont valables dans les parties du plan où la série de Laurent en question est convergente.

Nous nous bornerons ici à traiter un seul de ces développements, savoir celui obtenu à l'aide de la formule

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\mu+2s)\,\Gamma(\mu+s)}{s!} \overset{\mu+2s}{J}(x), \qquad (\alpha)$$

démontrée dans le § 18. En posant successivement dans cette formule $\mu+1$,

(*) *Studien über die Bessel'schen Functionen*, p. 50.

(**) *Memoria della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, serie IV, t. 3, 1881.

$\mu + 2, \mu + 3, \ldots$ au lieu de μ, on aura ce développement

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} b_s x^s = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \overset{\mu+n}{J}(x), \tag{1}$$

où l'on a posé

$$a_n = (\mu + n) \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\mu + n - s)}{s!} 2^{n-2s} b_{n-2s}. \tag{2}$$

La formule (1) est valable dans l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances donnée. Supposons que le paramètre μ soit une constante qui ne doit pas être égale à un négatif entier, nous démontrerons aisément que ce développement ne peut être effectué que d'une seule manière.

Posant dans (1) $\mu = 0$, on retombe dans la formule démontrée pour la première fois par M. C. Neumann (*). C'est pourquoi je propose pour les séries générales de la forme (1) la désignation *séries neumanniennes de la première espèce,* tandis que les séries contenant les produits de deux fonctions cylindriques, découvertes aussi — *pour les paramètres entiers* — par M. Neumann (**), seront désignées comme *séries neumanniennes de la deuxième espèce;* on les obtient aisément à l'aide de la formule (19) du § 31.

Parmi les géomètres qui ont étudié les séries *neumanniennes* de la première espèce, citons MM. König (***), Gram (****), Sonine (*****), Pincherle (******), Kapteyn (*******). Dans la thèse intéressante de M. J.-P. Gram on trouvera d'importantes remarques critiques sur l'application d'une telle série pour le calcul numérique de la fonction développée.

Tous ces auteurs supposent μ entier. M. Gegenbauer (********) à donné pour la première fois, d'après ce que je sais, notre développement général (1).

(*) *Theorie der Bessel'schen Functionen.*

(**) *Berichte über die Verh. d. Kgl. sächs. Gesellschaft d. Wiss. zu Leipzig*, 1868 ou *Math. Ann.*, t. 3.

(***) *Mathematische Annalen*, t. 5 (1873).

(****) *Om Raekkeudviklinger bestemte ved Hjaelp af de mindste Kvadraters Methode*, p. 44 (Thèse de doctorat, Copenhague, 1879).

(*****) *Mathematische Annalen*, t. 16 (1880).

(******) Loc. cit. et *Reale Istituto Lombardo Rendiconti*, serie II, t. 15, p. 224-225 (1882).

(*******) *Annales de l'École Normale.* 3e série, t. 10 (1893).

(********) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 74. II, p. 124-130 (1876).

§ 33. Posons maintenant dans notre formule (α) $\mu-1$, $\mu-2$, $\mu-3$,... au lieu de μ, nous aurons un développement de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^{-n} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} a_s \overset{\mu+s}{J}(x), \tag{3}$$

où l'on a posé

$$a_p = \frac{(-1)^p (\mu+p)\pi}{\sin\mu\pi} \cdot \sum_{s \leq \frac{p+1}{2}}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(s-p+1-\mu)} \cdot \frac{b_s}{2^{2s-p}}. \tag{4}$$

La formule (3) est valable partout où la série donnée est convergente; il est évident que le paramètre μ ne doit pas être supposé égal à un entier. Cela posé, nous avons démontré le théorème général suivant:

Une série de Laurent *est toujours développable selon les fonctions cylindriques, comme voici:*

$$\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} b_s x^s = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \overset{\mu+n}{J}(x).$$

Les coefficients a_n peuvent être déterminés à l'aide des formules (2), (4), *tandis que le paramètre μ désigne une constante finie qui ne doit pas être égale à un nombre entier. La série des fonctions cylindriques ainsi obtenue est convergente dans la partie du plan des x, où l'est la série de* Laurent *donnée.*

§ 34. Cherchons par exemple le développement de la fonction

$$\frac{1}{y-x}, \quad |x| < |y|,$$

nous aurons immédiatement, en vertu des formules (1), (2):

$$\frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \left(\overset{\mu,0}{O}(y) \overset{\mu}{J}(x) + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{\mu,s}{O}(y) \overset{\mu+s}{J}(x) \right), \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\overset{\mu,0}{O}(y) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{y}, \quad \overset{\mu,n}{O}(y) = \frac{\mu+n}{4} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\mu+n-s)}{s!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n-2s+1}. \tag{6}$$

On aura de même

$$\frac{x}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (\mu+s) \overset{\mu,s}{S}(y) \overset{\mu+s}{J}(x), \tag{7}$$

où l'on suppose aussi $|x| < |y|$, et où l'on a posé

$$\overset{\mu,n}{S}(y) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\mu+n-s)}{s!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n-2s}. \tag{8}$$

Posons $\mu = 0$, $\overset{0,n}{O}(y)$ deviendra identique à la fonction $\overset{n}{O}(y)$ de M. Neumann, tandis que $\overset{0,n}{S}(y)$ nous conduira à la fonction $\overset{n}{S}(y)$ de Schläfli. M. Neumann a démontré son théorème en prenant pour point de départ le développement (6) pour $\mu = 0$, et en appliquant ensuite le théorème fondamental de Cauchy. C'est précisément par la même méthode que M. Gegenbauer a donné sa généralisation du théorème de M. Neumann. Cependant, il n'est pas trop clair comment M. Gegenbauer est arrivé à la fonction $\overset{\mu,n}{O}(y)$.

Appliquant la formule (23) du § 25, on aura de la même manière ces deux développements nouveaux:

$$\frac{e^{-i(y-x)}}{y-x} = \frac{1}{(2x)^{\mu}} \left(\overset{\mu,0}{\mathfrak{O}}(y) \overset{\mu}{J}(x) + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{\mu,s}{\mathfrak{O}}(y) \overset{\mu+s}{J}(x) \right), \tag{9}$$

$$\frac{x\, e^{-i(y-x)}}{y-x} = \frac{1}{(2x)^{\mu}} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (\mu+s) \overset{\mu,s}{\mathfrak{S}}(y) \overset{\mu+s}{J}(x), \tag{10}$$

où l'on suppose encore $|x| < |y|$, et où l'on a posé

$$\overset{\mu,n}{\mathfrak{O}}(y) = 2 \sum_{p=0}^{p=n} \frac{i^{n-p}\sqrt{\pi}}{e^{iy}} \cdot \frac{\Gamma(2\mu+2n-p)}{(n-p)!\,\Gamma\left(\mu+p+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\mu+n}{(2y)^{p+1}}, \tag{11}$$

$$\overset{\mu,n}{\mathfrak{S}}(y) = \frac{2\sqrt{\pi}}{e^{iy}} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Gamma(2\mu+p+1)}{(n-p)!\,\Gamma\left(\mu+p+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{i^{n-p}}{(2y)^{p}}. \tag{12}$$

Dans le cas $\mu = 0$ les fonctions $\overset{0,n}{\mathfrak{O}}(y)$, $\overset{0,n}{\mathfrak{S}}(x)$ deviendront identique à $\overset{n}{\mathfrak{O}}(y)$, $\overset{n}{\mathfrak{S}}(y)$ introduites dans le § 23.

Développons, à l'aide des formules (3), (4) du § 33, les fonctions regardées dans ce paragraphe pour $|x| > |y|$, nous trouverons des coefficients remarquables.

VIII. Série neumannienne obtenue pour la fonction $\overset{\nu}{J}(\alpha x)$.

§ 35. Supposons que ν et α désignent deux constantes finies, nous aurons, en vertu de (1), (2) du § 32, ce développement

$$\left(\frac{2}{\alpha x}\right)^{\nu} \overset{\nu}{J}(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\mu + 2s)\, a_{2s} \overset{\mu+2s}{J}(x), \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\left. \begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \Gamma(\mu + 2n - s)\, \alpha^{2n-2s}}{s!\,(n-s)!\,\Gamma(\nu + n - s + 1)} = \\ &= \frac{\Gamma(\mu + n)}{\Gamma(\nu + n + 1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \binom{-\mu - n}{n - s} \binom{\nu + n}{s} \alpha^{2n-2s}. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

De la formule générale (1) on peut en déduire un nombre d'autres, démontrées habituellement à l'aide des principes les plus différents et en suivant des marches assez longues.

Regardons, l'un après l'autre, les plus intéressants de ces cas spéciaux.

§ 36. Posant $\alpha = 1$, on aura

$$\overset{\nu}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\mu + 2s)\,\Gamma(\mu + s)}{\Gamma(\nu + s + 1)} \cdot \binom{\nu - \mu}{s} \cdot \overset{\mu+2s}{J}(x); \tag{3}$$

supposant en outre $\nu = \mu + r$, r étant un positif entier, on aura la formule remarquable

$$\left(\frac{2}{x}\right)^r \overset{\mu+r}{J}(x) = \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(\mu + 2s)\binom{r}{s}}{(\mu + s + 1)(\mu + s + 2)\ldots(\mu + s + r)} \cdot \overset{\mu+2s}{J}(x), \tag{4}$$

qui nous donnera toutes les formules de ce genre démontrées par M. Lommel (*). Dans notre formule en question $\overset{\mu}{J}(x)$ peut être remplacée par une fonction quelconque satisfaisant à la deuxième équation fondamentale des fonctions cylindriques. Posant en outre dans (3) $\nu = \pm \frac{1}{2}$, on retombe dans les développements pour $\cos x$ et $\sin x$ indiqués dans le § 25.

(*) *Studien über die Bessel'schen Functionen.*

Enfin, différentions par rapport à ν la formule (3), posons ensuite $\nu = \mu$, nous aurons

$$\overset{\mu}{\mathfrak{J}}(x) = -\psi(\mu+1)\overset{\mu}{J}(x) - \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\mu+n}\right)\overset{\mu+2n}{J}(x), \tag{5}$$

$\overset{\mu}{\mathfrak{J}}(x)$ et $\psi(\mu)$ désignant les deux fonctions introduites dans le § 1. Supposons maintenant μ égal au positif entier n, nous aurons pour la fonction de Schläfli (*).

$$\overset{n}{U}(x) = -\overset{n}{\mathfrak{J}}(x) + C\overset{n}{J}(x),$$

où C désigne la constante d'Euler, ce développement bien connu:

$$\left.\begin{aligned}\overset{n}{U}(x) = &\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\overset{n}{J}(x)+ \\ &+\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{n+s}\right)\overset{n+2s}{J}(x).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 37. Supposant $\nu = -\frac{1}{2}$, puis appliquant la formule

$$\Gamma(n-p+1)\,\Gamma\left(n-p+\frac{1}{2}\right) = 2^{-2n+2p}\,.\,\Gamma(2n-2p+1)\,.\,\sqrt{\pi}$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s\,\Gamma(\mu+2n-s)}{s!\,(2n-2s)!}(2\alpha)^{2n-2s} = \\ &= (-1)^n\cdot\frac{\Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}}\cdot\overset{\mu,2n}{K}(\alpha),\end{aligned}\right\} \tag{α}$$

où $\overset{\mu,s}{K}(\alpha)$ est la fonction sphérique généralisée qui peut être définie par la formule

$$(1-2\alpha x+x^2)^{-\mu} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\overset{\mu,s}{K}(\alpha)\,x^s, \quad |x|<1, \quad \mu \neq 0; \tag{β}$$

supposant $\mu = \frac{1}{2}$, on retombe dans la fonction sphérique ordinaire, c'est-à-dire

$$\overset{\frac{1}{2},s}{K}(\alpha) = \overset{s}{P}(\alpha).$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. 3, p. 144 (1871) (la fonction $\overset{n}{U}(x)$ est designée par $\overset{n}{E}(x)$).

Cela posé, notre formule générale nous donnera

$$\cos \alpha x = \frac{\Gamma(\mu)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\mu + 2s) \overset{\mu,2s}{K}(\alpha) \overset{\mu+2s}{J}(x), \tag{7}$$

On aura de la même manière, en supposant $\nu = \frac{1}{2}$ et en posant $\mu + 1$ au lieu de μ, cette formule analogue

$$\sin \alpha x = \Gamma(\mu) \left(\frac{2}{x}\right)^\mu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\mu + 2s + 1) \overset{\mu,2s+1}{K}(\alpha) \overset{\mu+2s+1}{J}(x). \tag{8}$$

Posons dans (7), (8) $\mu = \frac{1}{2}$, nous retrouvons deux formules dues à M. Bauer (*), tandis que les formules générales sont données pour la première fois par M. Gegenbauer (**).

Il nous reste encore de poser $\mu = 0$; dans ce cas la définition (β) de $\overset{\mu,s}{K}(\alpha)$ est en défaut, tandis que la première (α) garde sa validité. Pour trouver la valeur correspondante du coefficient K, appliquons les formules de Jacobi (***).

$$\left.\begin{aligned} \cos(x \cos\varphi) &= \overset{0}{J}(x) + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \overset{2s}{J}(x) \cos 2s\varphi, \\ \sin(x\cos\varphi) &= 2 \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{2s+1}{J}(x) \cos(2s+1)\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{ν}$$

Or, les développements (γ) ne se faisant que d'une seule manière, on aura:

$$\lim_{\mu=0} \left(\Gamma(\mu)(\mu + n) \overset{\mu,n}{K}(\cos\varphi)\right) = 2\cos n\varphi, \quad n > 0, \tag{9}$$

formule qui nous sera bien utile plus bas.

§ 38. La formule

$$\Gamma(\mu) \overset{\mu,2n}{K}(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu + n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \binom{-\mu - n}{n - s} \binom{\mu + n - \frac{1}{2}}{s} (\sin\varphi)^{2n-2s},$$

nous conduira naturellement à poser dans notre formule générale (1) $\nu = \mu - \frac{1}{2}$,

(*) *Journal de Crelle*, t. 56, p. 106 (1859).
(**) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 74, II, p. 127 (1876)
(***) *Journal de Crelle*, t. 15, p. 12 (1836).

$\alpha = \sin\varphi$, ce qui donne immédiatement la formule remarquable

$$\frac{J^{\mu-\frac{1}{2}}(x \sin\varphi)}{(\sin\varphi)^{\mu-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\mu + 2s)\,\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + s + \frac{1}{2}\right)} K^{\mu,2s}(\cos\varphi)\, J^{\mu+2s}(x). \tag{10}$$

On n'a connu jusqu'ici que les cas spéciaux qui correspondent à $\mu = p + \frac{1}{2}$, $\mu = p$, p étant un entier non négatif. En vérité, M. Bauer (*) a développé notre formule pour $\mu = p + \frac{1}{2}$; M. Hobson (**) l'a retrouvée pour $p = 0$ sans connaître évidemment le développement de M. Bauer.

Posant $\mu = 0$, on retombe dans la première des formules (γ). M. Hobson (***) donne encore la formule (10) pour $\mu = 1$, sans remarquer que le développement ainsi obtenu peut être déduit immédiatement de la dernière des formules (γ) en y posant $\frac{\pi}{2} - \varphi$ au lieu de φ. Curieusement MM. Gray et Matthews (****) donnent précisément la formule en question comme un excercice pour le lecteur sans remarquer, aux aussi, qu'elle appartient à Jacobi.

§ 39. Prenant pour point de départ les formules (7), (8), (10) on pourra en déduire une foule d'autres: soit des développements de certaines fonctions en série selon les fonctions cylindriques ou sphériques, soit des intégrales définies contenant l'une ou l'autre de ces deux classes de fonctions. Nous nous bornerons ici à donner une seule formule de ce genre.

Posons dans (7), (8) $\alpha = \cos\varphi$, nous aurons, en vertu d'une formule bien connue

$$J^{n}(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\mu + n + 2s)\, J^{\mu+n+2s}(x). \int_0^{\pi} K^{\mu,n+2s}(\cos\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi;$$

or, les coefficients qui figurent dans ce développement doivent être identiques à ceux obtenus de la formule (3) du § 36, ce qui donnera

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K^{\mu,n+2s}(\cos\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi = \binom{\mu + s - 2}{s}\binom{\mu + s + n - 1}{s + n},$$

(*) *Sitzungsberichte der Kgl. bayerischen Akademie.* 1875, p. 265.

(**) *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 25, p. 68 (1894).

(***) Loc. cit.

(****) *Treatise on Bessel Functions*, p. 270.

et par conséquent on aura ce développement

$$\overset{\mu,n}{K}(\cos\varphi) = 2\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}{}' \binom{\mu+s-1}{s}\binom{\mu+s+n-1}{s+n}\cos(n-2s)\varphi,$$

où l'accent après le signe $\sum$ désigne qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $n-2s=0$.

IX. Développement d'une fonction de la forme $f(y-x)$. Application à l'équation fondamentale $2D_x\overset{\nu}{F}(x) = \overset{\nu-1}{F}(x) - \overset{\nu+1}{F}(x)$.

§ 40. Les série *neumanniennes* particulières que nous venons de donner dans les deux sections précédentes ont introduit un nombre de fonctions nouvelles, plus ou moins intéressantes. Pour étudier, d'une manière profonde et uniforme, la nature de toutes ces fonctions différentes il faut donner certaines transformations simples d'une série *neumannienne* de la première espèce déduites des formules fondamentales des fonctions cylindriques.

En effet, appliquons l'identité

$$\frac{2(\mu+n)}{x}\overset{\mu+n}{J}(x) = \overset{\mu+n-1}{J}(x) + \overset{\mu+n+1}{J}(x) \qquad (\alpha)$$

sur chaque terme du second membre de la formule

$$f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\sum_{n=0}^{n=\infty} a_{\mu}^{n}\overset{\mu+n}{J}(x),$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{x}f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\left[\frac{a_{\mu}^{0}}{\mu}\overset{\mu-1}{J}(x) + \frac{a_{\mu}^{1}}{\mu+1}\overset{\mu}{J}(x) + \right.\\ \left. + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{a_{\mu}^{n-1}}{\mu+n-1} + \frac{a_{\mu}^{n+1}}{\mu+n+1}\right)\overset{\mu+n}{J}(x)\right],\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

pourvu que μ soit supposé différent de zéro. Posant $\mu=0$, on aura au contraire

$$\frac{2}{x}f(x) = \frac{2a_0}{x}\overset{0}{J}(x) + a_1\overset{0}{J}(x) + \frac{a_2}{2}\overset{1}{J}(x) + \sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{n-1} + \frac{a_{n+1}}{n+1}\right)\overset{n}{J}(x), \qquad (2)$$

où nous avons écrit simplement a_n au lieu de a_0^n. C'est la formule (1) qui

a fourni à M. Lommel un moyen pour démontrer notre formule (21) du § 18 dans le cas particulier $\nu = 0$.

En outre, la formule

$$2 D_x \overset{\mu+n}{J}(x) = \overset{\mu+n-1}{J}(x) - \overset{\mu+n+1}{J}(x)$$

nous donnera de même

$$2 f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_\mu^n \left(\overset{\mu+n-1}{J}(x) - \overset{\mu+n+1}{J}(x) - \frac{2\mu}{x} \overset{\mu+n}{J}(x)\right);$$

éliminant ensuite, à l'aide de (α), la fonction $\overset{\mu+n}{J}(x)$, on aura finalement:

$$2 f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{n+1}{\mu+n+1} a_\mu^{n+1} - \frac{2\mu+n-1}{\mu+n-1} a_\mu^{n-1}\right) \overset{\mu+n}{J}(x), \tag{3}$$

formule qui est valable aussi pour $\mu = 0$, pourvu que le coefficient de $\overset{0}{J}(x)$ soit a_1, et celui de $\overset{1}{J}(x)$ soit $a_2 - a_0$.

§ 41. Pour avoir une première application des formules démontrées au paragraphe précédent, supposons que $f(y-x)$ soit une fonction développable en série de Taylor, nous aurons un développement de la forme

$$f(y-x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \left(\overset{\mu,0}{a}(y) \overset{\mu}{J}(x) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \overset{\mu,n}{a}(y) \overset{\mu+n}{J}(x)\right). \tag{β}$$

Différentions ensuite par rapport ou à x ou à y la formule (β), nous aurons, en vertu de (3)

$$\left.\begin{aligned} 2 D_y \overset{\mu,n}{a}(y) &= \frac{2\mu+n-1}{\mu+n-1} \overset{\mu,n-1}{a}(y) - \frac{n+1}{\mu+n+1} \overset{\mu,n+1}{a}(x); \quad n > 0, \\ D_y \overset{\mu,n}{a}(y) &= -\frac{1}{\mu+1} \cdot \overset{\mu,1}{a}(y). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Inversement, on verra que les formules (4) sont suffisantes aussi pour établir la formule (β).

Supposons maintenant que nous ayons en outre ces deux développements

$$\frac{x}{y-x} \cdot f(y-x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (\mu+n) \overset{\mu,n}{B}(y) \overset{\mu+n}{J}(y), \tag{γ}$$

$$\frac{1}{y-x} \cdot f(y-x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \left[\overset{\mu,0}{A}(x) \overset{\mu}{J}(x) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \overset{\mu,n}{A}(y) \overset{\mu+n}{J}(x)\right], \tag{δ}$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (β), cette formule fondamentale

$$2 y \overset{\mu,n}{A}(y) = (\mu+n) \overset{\mu,n}{B}(y) + 2 \overset{\mu,n}{a}(y), \quad n \geqq 0. \tag{5}$$

Transformant ensuite (γ) à l'aide de (1), on aura cette autre formule fondamentale

$$\left.\begin{aligned}&\overset{\mu,n-1}{B}(y)+\overset{\mu,n+1}{B}(y)=4\overset{\mu,n}{A}(y),\quad n>0,\\&\overset{\mu,1}{B}(y)=2\overset{\mu,0}{A}(y).\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Cela posé, nous pourrons, à l'aide des formules (5), (6), éliminer ou les fonctions $\overset{\mu,n}{A}(y)$ ou les fontions $\overset{\mu,n}{B}(y)$, ce qui donnera respectivement

$$\overset{\mu,n-1}{B}(y)+\overset{\mu,n+1}{B}(y)=\frac{2(\mu+n)}{y}\overset{\mu,n}{B}(y)+\frac{4}{y}\overset{\mu,n}{a}(y)\tag{7}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}&2\overset{\mu,n}{A}(y)=\frac{y\overset{\mu,n+1}{A}(y)-\overset{\mu,n+1}{a}(y)}{\mu+n+1}+\frac{y\overset{\mu,n-1}{A}(y)-\overset{\mu,n-1}{a}(y)}{\mu+n-1},\quad n>0,\\&y\overset{\mu,0}{A}(y)=\overset{\mu,0}{a}(y).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Remarquons encore que $\overset{\mu,n}{A}(y)$ doit satisfaire aux formules (4), nous aurons, en vertu de (5), cette autre formule fondamentale pour $\overset{\mu,n}{B}(y)$

$$2D_y\overset{\mu,n}{B}(y)=\frac{2\mu+n}{\mu+n}\overset{\mu,n-1}{B}(y)-\frac{n}{\mu+n}\overset{\mu,n+1}{B}(y).\tag{9}$$

De ces formules (4) — (9) on peut en déduire les formules particulières auxquelles $\overset{\mu,n}{O}(y)$, $\overset{\mu,n}{S}(y)$ et $\overset{\mu,n}{\mathfrak{O}}(y)$, $\overset{\mu,n}{\mathfrak{S}}(y)$ doivent satisfaire, en posant respectivement

$$\overset{\mu,n}{a}(y)=\frac{\mu+n}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{n\pi}{2},$$

$$\overset{\mu,n}{a}(y)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{(\mu+n)\,\Gamma(\mu+2n)}{2\,.\,n!\,e^{iy}}.$$

Il nous reste encore de montrer que les fonctions $\overset{\mu,n}{A}(y)$, $\overset{\mu,n}{B}(y)$ sont, toutes les deux, des intégrales particulières de deux équations linéaires, non homogènes et du deuxième ordre, pourvu que $\overset{\mu,n}{a}(y)$ soit une fonction donnée. Pour obtenir l'équation différentielle à laquelle $\overset{\mu,n}{B}(y)$ doit satisfaire, il faut éliminer

des équations (6), (7) $\overset{\mu,n-1}{B}(y)$ et puis $\overset{\mu,n+1}{B}(y)$; différentiant de nouveau les formules ainsi obtenues, on aura l'équation cherchée:

$$\left.\begin{aligned} z'' + \frac{1-2\mu}{y} z' + \left(1 - \frac{n(2\mu+n)}{y^2}\right) z = \frac{2n(2\mu+n)}{(\mu+n)y^2} \overset{\mu,n}{a}(y) - \\ - \frac{2n}{(\mu+n)y} D_y \overset{\mu,n}{a}(y) + \frac{2(2\mu+n-1)}{(\mu+n-1)y} \overset{\mu,n-1}{a}(y). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Cela posé, appliquons la formule (5), nous aurons pour $\overset{\mu,n}{A}(y)$ l'équation suivante:

$$\left.\begin{aligned} z'' + \frac{3-2\mu}{y} z' + \left(1 - \frac{(n-1)(n+1-2\mu)}{y^2}\right) z = \\ = \frac{1}{y}\left(D_y^2 \overset{\mu,n}{a}(y) - D_y \overset{\mu,n}{a}(y) + \overset{\mu,n}{a}(y)\right) + \frac{(\mu+n)(2\mu+n-1)}{(\mu+n-1)y^2} \overset{\mu,n-1}{a}(y). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

§ 42. Supposons maintenant $\mu = 0$, et écrivons simplement $\overset{n}{a}(x)$, $\overset{n}{A}(x)$, $\overset{n}{B}(x)$ au lieu de $a^{0,n}$, $A^{0,n}$, $B^{0,n}$ respectivement, nous verrons que ces fonctions satisfont, toutes les trois, à l'équation fonctionnelle

$$2 D_x \overset{n}{F}(x) = \overset{n-1}{F}(x) - \overset{n+1}{F}(x), \quad (\varepsilon)$$

tandis que $\overset{n}{B}(x)$ satisfait aussi à l'équation fonctionnelle

$$\overset{n-1}{B}(x) + \overset{n+1}{B}(x) = \frac{2n}{x} \overset{n}{B}(x) + \frac{4}{x} \overset{n}{a}(x), \quad (\zeta)$$

cas particulier de la formule (2) du § 4. Toutes ces formules obtenues dans le cas $\mu = 0$ sont valables aussi pour les valeurs négatives de l'indice n, pourvu que l'on définisse les fonctions correspondantes à l'aide des formules:

$$\overset{-n}{A}(x) = (-1)^n \overset{n}{A}(x), \quad \overset{-n}{a}(x) = (-1)^n \overset{n}{a}(x), \quad \overset{-n}{B}(x) = (-1)^{n-1} \overset{n}{B}(x). \quad (\eta)$$

Or, nous avons, en vertu de la formule (β) du § 41, ces expressions pour $\overset{n}{a}(x)$:

$$\overset{0}{a}(x) = f(x), \quad (12)$$

et généralement, en appliquant (2) du § 32:

$$\overset{n}{a}(x) = (-1)^n n \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{2^{n-2s}}{n-s} \binom{n-s}{s} \cdot f^{(n-2s)}(x), \quad (12_a)$$

$\overset{(n)}{f}(x)$ désignant la dérivée d'ordre n, de sorte que nous venons de démontrer la proposition suivante :

Une solution de l'équation fonctionnelle (ε) *où n désigne un nombre entier, peut être donnée à l'aide des formules* (7), (12), (12_a), $f(x)$ *étant une fonction arbitraire.*

Mais, comment venir de ce cas particulier à l'équation générale de la forme (2), n désignant une quantité quelconque ? En effet, dans ce cas général, il s'agit de déterminer précisément la fonction $\overset{n}{F}(x)$, supposée plus haut donnée arbitrairement pour $n = 0$.

Remarquons en outre que les formules (4) du § 41 nous fourniront le moyen de résoudre l'équation fonctionnelle (ξ), pourvu que n soit un entier et les fonctions $\overset{n}{a}(x)$ soient des fonctions données.

Il nous reste encore de dire quelques mots sur les fonctions $\overset{n}{A}(x)$, $\overset{n}{B}(x)$, connues jusqu'ici.

M. Neumann (*) a donné les formules qui correspondent à (4), (11) pour $\overset{n}{O}(x)$. Plus tard, Schläfli (**) a développé toutes les formules données plus haut pour les fonctions $\overset{n}{O}(x)$, $\overset{n}{S}(x)$; en même temps, à peu près, M. Gegenbauer (***) a retrouvé la formule (8) pour $\overset{n}{O}(x)$ sans connaître évidemment la démonstration de Schläfli. M. Lommel (****) a démontré de nouveau les formules (4), (8) pour $\overset{n}{O}(x)$, en partant de certaines fonctions plus générales. Citons en outre M. Crelier (*****) qui a retrouvé, par une méthode élégante et fort ingénieuse, les formules susdites pour les fonctions $\overset{n}{O}(x)$ et $\overset{n}{S}(x)$.

Cependant, toutes les méthodes indiquées sont d'un caractère beaucoup trop spécial pour que ces géomètres aient pu approfondir cette question.

§ 43. Donnerons maintenant une application importante du développement regardé dans le § 41. En effet, supposons que $\overset{\nu}{F}(x)$ soit une fonc-

(*) *Theorie der Bessel'schen Functionen.*

(**) *Matematische Annalen*, t. 3, p. 137, 139 (1871).

(***) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 65, II, p. 35 (1872).

(****) *Mathematische Annalen*, t. 9, p. 444 (1876).

(*****) *Comptes rendus*, t. 125, p. 860-863 (1897).

tion satisfaisant à l'équation fonctionnelle suivante

$$2\, D_x \overset{\nu}{F}(x) = \overset{\nu-1}{F}(x) - \overset{\nu+1}{F}(x), \qquad (\alpha)$$

et que $\overset{\nu}{F}(y-x)$ soit développable en série de Taylor. Cela posé, cherchons la série *neumannienne* correspondante à $\overset{\nu}{F}(y-x)$, μ étant supposé égal à zéro.

Dans ce cas nous aurons, en vertu des formules (4) du § 41 :

$$\overset{0}{a}(y) = \overset{\nu}{F}(y)$$

$$2\, \overset{1}{a}(y) = -\, 2\, D_y \overset{\nu}{F}(y) = \overset{\nu+1}{F}(y) - \overset{\nu-1}{F}(y),$$

ce qui donnera généralement par la conclusion habituelle de n à $n+1$:

$$2\, \overset{n}{a}(y) = \overset{\nu+n}{F}(y) - \overset{\nu-n}{F}(y),$$

de sorte que nous aurons, après avoir changé le signe de x, cette formule pour l'addition des arguments :

$$\overset{\nu}{F}(y+x) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \overset{\nu+s}{F}(y)\, \overset{-s}{J}(x), \qquad (13)$$

appliquable pour toutes les valeurs de x et de y pour lesquelles $\overset{\nu}{F}(y+x)$ peut être développée en série de Taylor ; cette formule appartient dans toute sa généralité à M. Sonine (*).

Inversement, nous avons, dans le § 41, démontré que la formule (α) est une conséquence immédiate de (13), de sorte que nous avons la proposition suivante:

Pour qu'une fonction $\overset{\nu}{F}(x)$ *ait une formule d'addition de la forme* (13), *il faut, et il suffit: 1.º que* $\overset{\nu}{F}(x)$ *satisfait à l'équation* (α) *2.º que* $\overset{\nu}{F}(y-x)$ *est développable en série de* Taylor.

Il est évident que la formule (13) est valable pour un grand nombre des fonctions que nous venons d'étudier dans ce Mémoire. Regardons les exemples suivants:

1.º *Les fonctions cylindriques; dans ce cas il faut généralement que* $|x| < |y|$.

(*) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 23 (1880).

La formule correspondante pour $\overset{0}{J}(x+y)$ appartient à M. Neumann (*), tandis que M. Lommel (**) a développé, selon la formule (13), la fonction $\overset{n}{J}(x+y)$, n étant un positif entier; dans ce cas, la condition $|y|>|x|$ peut être supprimée. La formule de M. Lommel a été demontrée d'une manière très élégante par MM. Gray et Matthews (***). Enfin, Schläfli (****) a donné notre formule pour $\overset{\mu}{J}(x+y)$, μ étant une quantité quelconque.

2.° *Les fonctions* $\overset{n}{A}(x)$, $\overset{n}{B}(x)$ *étudiées dans les* §§ 41, 42.

Schläfli (*****) a donné pour la première fois les développements des fonctions $\overset{n}{O}(x+y)$ et $\overset{n}{S}(x+y)$; dans ce cas il faut que $|x|<|y|$; même conditions pour le développement de $\overset{n}{\mathfrak{O}}(x+y)$ et de $\overset{n}{\mathfrak{S}}(x+y)$.

3.° *Les fonctions* $\overset{\mu}{\Psi}(x)$, $\overset{\mu}{\Phi}(x)$, $\overset{n}{\Omega}(x)$, $\overset{n}{\Lambda}(x)$, $\overset{n}{M}(x)$, $\overset{n}{\mathfrak{T}}(x)$, $\overset{n}{T}(x)$, *pour lesquelles la formule est valable pour toutes les valeurs finies de x et de y.*

Partant des expressions intégrales obtenues pour les fonctions cylindriques $\overset{\mu}{J}(x)$ et $\overset{\mu}{Y}(x)$, pour les fonctions $\overset{n}{O}(x)$ et $\overset{n}{S}(x)$, et pour $\overset{n}{T}(x)$, M. J.-H. Graf (******) a démontré les formules correspondantes à (13).

Supposons maintenant que la fonction $\overset{\nu}{F}(x)$ soit holomorphe aux environs de $x=0$, nous pouvons dans la formule (13) poser $y=0$, ce qui donne la série *neumannienne*:

$$\overset{\nu}{F}(x)=\overset{\nu}{F}(0)\,\overset{0}{J}(x)+\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\overset{\nu-s}{F}(0)+(-1)^{s}\,\overset{\nu+s}{F}(0)\right)\overset{s}{J}(x), \tag{14}$$

formule qui donnera immédiatement les développements des fonctions énumérées dans l'exemple 3.° Les coefficients correspondants peuvent être tirés facilement des expressions intégrales que nous avons appliquées pour ces fonctions.

Le développement de $\overset{n}{T}(x)$ est bien connu.

(*) *Theorie der Bessel'schen Functionen*, p. 40.
(**) *Studien über die Bessel'schen Functionen*, p. 27.
(***) *Treatise on Bessel Functions*, p. 24.
(****) *Mathematische Annalen*, t. 3, p. 137.
(*****) Loc. cit., p. 141.
(******) *Mathematische Annalen*, t. 43, p. 136-144 (1893).

Regardons le développement correspondant de la fonction $\overset{\mu}{\Phi}(x)$, savoir:

$$\overset{\mu}{\Phi}(x) = \frac{i^{-\mu}\sin\mu\pi}{\pi}\left[\frac{\overset{0}{J}(x)}{\mu} + 2\mu\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{i^{-s}}{\mu^2 - s^2}\overset{s}{J}(x)\right], \tag{15}$$

ce qui donnera pour la transcendante de Kramp ce développement

$$\frac{K(\sqrt{2ix})}{\sqrt{2ix}}e^{ix} = 2\overset{0}{J}(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{i^{-s}}{s^2 - \frac{1}{4}}\overset{s}{J}(x). \tag{16}$$

X. Développement d'une fonction de la forme $f(x\,y\,i)$. Fonctions sphériques. Généralisations.

§ 44. Supposant donnée la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

on peut écrire la série *neumannienne* correspondante sous cette forme

$$f(x\,y\,i) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\Gamma(\mu)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} i^s(\mu+s)\overset{\mu,s}{A}(y)\overset{\mu+s}{J}(x), \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\Gamma(\mu)\overset{\mu,n}{A}(y) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s\Gamma(\mu+n-s)}{s!}a_{n-2s}(2y)^{n-2s}, \tag{2}$$

de sorte que $\overset{\mu,n}{A}(y)$ deviendra identique à la fonction sphérique générale, si l'on pose

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Or, tous les polynômes $\overset{\mu,n}{A}(y)$ satisfont à une même formule fondamentale que l'on peut démontrer de la manière suivante: Différentiant par rapport à y la formule (1), et appliquant la transformation (1) du § 40, on aura

$$\left.\begin{aligned} 2if'(x\,y\,i) = \Gamma(\mu)\left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}\cdot\Big[D_y\overset{\mu,0}{A}(y)\overset{\mu-1}{J}(x) + i\,D_y\overset{\mu,1}{A}(y)\overset{\mu}{J}(x) + \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} i^{s-1}\left(D_y\overset{\mu,s-1}{A}(y) - D_y\overset{\mu,s+1}{A}(y)\right)\overset{\mu+s}{J}(x)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Différentiant ensuite par rapport à x la même formule (1), appliquant la formule (3) du § 40, on aura, en vertu de (α), la formule cherchée:

$$\left.\begin{aligned} & y D_y \overset{\mu,n+1}{A}(y) - y D_y \overset{\mu,n-1}{A}(y) = (n+1) \overset{\mu,n+1}{A}(y) + (2\mu+n-1) \overset{\mu,n-1}{A}(y), \quad n>0, \\ & y D_y \overset{\mu,1}{A}(y) = \overset{\mu,0}{A}(y). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

On verra aisément que les formules (3) sont suffisantes aussi pour établir la formule (1), pourvu que la série *neumannienne* ainsi obtenue soit convergente.

§ 45. Il est évident que l'on peut déduire de notre polynôme général $\overset{\mu,n}{A}(y)$ plusieurs des fonctions introduites antérieurement dans ce Mémoire.

Exemples:

1.° $\overset{\mu,n}{A}(y) = \overset{\mu,n}{K}(y)$.

2.° $\overset{\mu,n}{A}(y) = \frac{1}{n} \cos n\varphi$, regardé comme fonction de $y = \cos\varphi$.

3.° $\overset{\mu,2n}{A}(y) = \frac{1}{2n} \cos 2n\varphi$, regardé comme fonction de $y = \sin\varphi$.

4.° $\overset{\mu,n}{A}(y) = S^{\mu,n}\left(\frac{1}{y}\right)$.

5.° $\overset{\mu,n}{A}(y) = \frac{2(\mu+n)}{y} O^{\mu,n}\left(\frac{1}{y}\right)$.

Pour étudier particulièrement les fonctions sphériques, faisons dans la formule (1) $f(x) = e^x$, puis une différentiation de la formule ainsi obtenue donnera immédiatement plusieurs des formules fondamentales des fonctions sphériques. Or, au lieu de développer ces formules bien connues nous préférons dire un mot sur nos polynômes $\overset{\mu,n}{A}(y)$, regardés comme fonctions de développement. En effet, différentions n fois par rapport à x la formule (1), puis posons $x = 0$, nous aurons le développement suivant d'un puissance positive entière de y:

$$2^n a_n y^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\mu+n-2s}{s!\,\Gamma(\mu+n-s+1)} \overset{\mu,n-2s}{A}(y). \quad (4)$$

Il est bien remarquable que *les formules* (3) *entraînent nécessairement ce développement.*

A l'aide de la formule (4) on peut développer *formellement* une série de puissances selon les polynômes $\overset{\mu,n}{A}(y)$. En effet, portant l'expression (4) au

lieu de chaque puissance de la série en question, on aura — le développement ainsi trouvé supposé possible —

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} b_p x^p = \sum_{s=0}^{s=\infty} c_s \overset{\mu,s}{A}(x), \tag{5}$$

où l'on a posé

$$c_s = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\mu + s}{2^{s+2r}\,.\,r\,!\,\Gamma(\mu + r + s + 1)} \cdot \frac{b_{s+2r}}{a_{s+2r}}. \tag{6}$$

La formule (5) nous donnera les développements connus selon les fonctions sphériques, si l'on fait dans (6) a_n égal à $\frac{1}{n\,!}$.

Cependant, la détermination des domaines où ce développement (5) est convergent, semble offrir des difficultés considérables, ce qui est une conséquence naturelle du fait que le paramètre μ et les coefficients a_n peuvent être choisis d'une manière complètement arbitraire. Par exemple, les développements selon les polynômes $O^{\mu,n}\left(\frac{1}{y}\right)$ et $S^{\mu,n}\left(\frac{1}{y}\right)$ sont convergents à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances même. Cela se démontrera aisément à l'aide des formules (5) et (7) du § 34. En outre, il est bien connu que les courbes de convergence des développements selon les fonctions sphériques seront des ellipses ayant leurs foyers aux points $(\pm 1, 0)$.

XI. Développement de $(R^2 - 2\,R\,r\cos\varphi + r^2)^{-\frac{\mu}{2}}\,.\,C^\mu(\sqrt{R^2 - 2\,R\,r\cos\varphi + r^2})$, φ désignant un angle réel.

§ 46. Nous terminerons nos recherches en donnant, d'après les principes généraux que nous venons d'expliquer, le développement connu de la fonction

$$(R^2 - 2\,R\,r\cos\varphi + r^2)^{-\frac{\mu}{2}}\,.\,C^\mu(\sqrt{R^2 - 2\,R\,r\cos\varphi + r^2}),$$

$\overset{\mu}{C}(x)$ désignant une fonction cylindrique quelconque de l'argument x et du paramètre μ, tandis que φ est un angle réel. Cela posé, notre fonction est développable en série de puissances ascendantes de r, pourvu que $|R| > |r|$.

Dans le cas particulier où la fonction cylindrique est celle de la première espèce cette condition peut être supprimée.

Posons maintenant pour abréger

$$\omega(r) = R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2, \quad \text{d'où} \quad \omega(0) = R^2,$$

mais écrivons simplement ω là où cette abréviation est sans ambiguïté, nous aurons un développement de la forme

$$\omega^{-\frac{\mu}{2}} C^{\mu}(\sqrt{\omega}) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \cdots, \tag{α}$$

où nous avons posé

$$b_0 = R^{-\mu} \overset{\mu}{C}(R), \quad n!\, b_n = D_r^n \left(\omega^{-\frac{\mu}{2}} C^{\mu}(\sqrt{\omega})\right)_{r=0}.$$

Appliquons ensuite la formule bien connue

$$D_\omega^n \left(\omega^{-\frac{\mu}{2}} C^{\mu}(\sqrt{\omega})\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega^{-\frac{\mu+n}{2}} C^{\mu+n}\left(\sqrt{\omega}\right),$$

et la formule habituelle pour la détermination des dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de fonctions (*), nous aurons

$$n!\, b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{1}{2}\right)^s \frac{u_s^n}{s!} \frac{\overset{\mu+s}{C}(R)}{R^{\mu+s}},$$

où

$$u_s^n = D_\rho^n \left[\left(\omega(\rho) - \omega(0)\right)^s\right]_{\rho=0} = D_\rho^n \left[\rho^s \left(\rho - 2R\cos\varphi\right)^s\right]_{\rho=0},$$

ce qui donne immédiatement

$$b_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \frac{(R\cos\varphi)^{n-2s}}{2^s \cdot s!\,(n-2s)!} \cdot \frac{\overset{\mu+n-s}{C}(R)}{R^{\mu+n-s}}.$$

§ 47. Cherchons ensuite le développement en série *neumannienne* de notre série de puissances (α). La formule (2) du § 32 montrera immédiatement que le coefficient a_n de $\overset{\mu+n}{J}(x)$ se présente sous forme d'un polynôme entier du degré n par rapport à $\cos\varphi$. Le coefficient de $(\cos\varphi)^{n-2p}$ deviendra

$$\frac{(\mu+n)\, 2^{n-2p}}{p!\,(n-2p)!\, R^{\mu}} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \Gamma(\mu+n-p+s) \left(\frac{2}{R}\right)^s \overset{\mu+n-2p+s}{C}(R);$$

(*) Voir par exemple Schlömilch: *Compendium der höheren Analysis*, t. II, p. 5.

or, d'après la formule (17) du § 30, cette expression est précisément égale à

$$\frac{(-1)^p (\mu + n)\, 2^{n-2p}\, \Gamma(\mu + n - p)}{p!\,(n-2p)!\, R^\mu} \cdot \overset{\mu+n}{C}(R).$$

Ces réductions faites, nous aurons

$$a_n = (\mu + n)\, \frac{\overset{\mu+n}{C}(R)}{R^\mu} \cdot \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^p\, \Gamma(\mu + n - p)}{p!\,(n-2p)!} (2\cos\varphi)^{n-2p},$$

ou, ce qui vaut autant

$$a_n = \Gamma(\mu)(\mu + n) \cdot \frac{\overset{\mu+n}{C}(R)}{R^\mu} \cdot \overset{\mu,n}{K}(\cos\varphi),$$

ce qui donnera finalement le développement cherché:

$$\omega^{-\frac{\mu}{2}} \cdot C^\mu(\sqrt{\omega}) = \frac{2^\mu\, \Gamma(\mu)}{R^\mu\, r^\mu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\mu + s)\, \overset{\mu+s}{J}(r)\, \overset{\mu+s}{C}(R)\, \overset{\mu,s}{K}(\cos\varphi). \qquad (1)$$

§ 48. Il faut dire un mot sur notre formule générale (1) dans le cas particulier $\mu = 0$. Appliquant la formule (9) du § 37, nous aurons immédiatement

$$C^0(\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2}) = \overset{0}{C}(R)\, \overset{0}{J}(x) + 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{s}{J}(r)\, \overset{s}{C}(R) \cos s\varphi, \qquad (2)$$

formule qui est due à M. Neumann (*), pourvu que la fonction cylindrique en question soit celle de la première espèce. Plus tard, feu M. Beltrami (**) a donné une nouvelle démonstration extrêmement élégante de cette même formule. La formule générale (1) est due à M. Gegenbauer (***) qui l'a demontrée et pour J^μ et pour Y^μ; sa démonstration est assez compliquée. C'est la même chose pour la démonstration donnée plus tard par M. Sonine (****) pour le développement de $J^\mu(\sqrt{\omega})$. Enfin M. J.-H. Graf (*****) a donné une nouvelle démonstration pour la formule (1), en transformant les expressions intégrales obtenues pour $J^\mu(\sqrt{\omega})$ et pour $Y^\mu(\sqrt{\omega})$.

(*) *Theorie der Bessel'schen Functionen*, p. 69.

(**) *Atti della reale Accademia delle scienze di Torino*, t. 16, p. 202 (1881).

(***) *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. 70, II, p. 6-16 (1874).

(****) *Mathematische Annalen*, t. 16, p. 23.

(*****) *Mathematische Annalen*, t. 43, p. 142 (1893).

Posons dans (1) $\varphi = \pi$, nous aurons, en vertu de la formule

$$\overset{\mu,n}{K}(-1) = \binom{-2\mu}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(2\mu + n)}{n!\,\Gamma(2\mu)},$$

cette nouvelle formule d'addition

$$\left.\begin{aligned} \frac{C^\mu(R+r)}{(R+r)^\mu} &= \frac{2\sqrt{\pi}}{2^\mu R^\mu r^\mu \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \cdot \\ \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} & \frac{(-1)^s (\mu + s)\,\Gamma(2\mu + s)}{s!} \overset{\mu+s}{J}(r) \overset{\mu+s}{C}(R), \quad |r| < |R|, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

qui appartient aussi à M. Gegenbauer.

Faisons ensuite dans (3) $C^\mu = \overset{\frac{1}{2}}{J}$ et $R = r = x$, nous aurons le développement élégant:

$$\sin 2x = \pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2s+1) \left(\overset{s+\frac{1}{2}}{J}(x)\right)^2, \tag{4}$$

qui est dû à feu M. Lommel (*). Faisons au contraire dans (3) $\mu = -\frac{1}{2}$, nous n'aurons qu'une identité, à cause du facteur $\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)$ figurant au dénominateur du second membre.

Copenhague, le 23 mai 1900.

(*) *Mathematische Annalen*, t. 2, p. 633 (1870).

Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili (*).

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

In tre successive Memorie pubblicate in questi *Annali* (Serie 3.ª, Tomi III, IV e V) ho esposto alcune ricerche sui teoremi di Guichard relativi alla deformazione delle quadriche di rotazione, collegandoli alla teoria della deformazione, nel senso di Beltrami, delle congruenze normali di rette. In questo modo di deformazione i raggi della congruenza C si pensano emanare dai punti di una superficie S di partenza, la quale nelle sue flessioni trasporta seco i raggi di C, invariabilmente legati alla S. Ma vi ha un secondo modo di deformare le congruenze, considerato da Ribaucour (**), e che può in certa guisa riguardarsi come il duale di quello di Beltrami. In questo nuovo modo di deformazione i raggi della congruenza C si pensano invece come individualmente giacenti nei piani tangenti di una superficie Σ, la quale flettendosi trasporta seco ogni suo piano tangente ed il raggio r di C ivi invariabilmente fissato. Anche in questo nuovo modo di deformazione vale come nel modo di Beltrami, il teorema fondamentale seguente (Ribaucour):

Se la congruenza C, in una sua particolare configurazione, ammette una superficie ortogonale S (e quindi infinite parallele) il luogo dei medesimi

(*) In una Nota col medesimo titolo (*Rendiconti dei Lincei*, settembre 1900) ho già enunciato i principali teoremi che vengono dimostrati nel presente lavoro.

(**) *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes.* Journal de Mathém. (4ème série), Tom. VII, 1891. V. Chap. VIII.

punti ove i raggi r di C segano normalmente S, rimarrà sempre, in tutte le flessioni di C, una superficie S ortogonale ai raggi stessi.

Ciò premesso, proponiamoci anche qui, come già per la deformazione nel senso di Beltrami, il problema fondamentale seguente, che diciamo il problema [B]:

[B] *Come deve scegliersi la superficie Σ e la congruenza normale C, i cui raggi giacciono individualmente nei piani tangenti di Σ, affinchè una superficie S normale ai raggi di C rimanga, in tutte le flessioni di Σ, una superficie d'area minima? ovvero una superficie a curvatura costante?*

È facile intanto riconoscere a priori che si debbono ritrovare fra le soluzioni del problema enunciato tutte quelle congruenze C che già si presentavano nella Mem.ª 1.ª (*) come soluzioni dell'analogo problema nella deformazione al modo di Beltrami.

In queste ultime soluzioni infatti i raggi di C uscivano dai punti di una superficie Σ' applicabile sopra una superficie di rotazione ed erano normali alle deformate dei paralleli, ed inclinati sulle deformate dei meridiani di un angolo costante lungo ogni singolo parallelo. Di qui, e dalle proprietà delle superficie complementari, discende che se della superficie Σ' prendiamo la complementare Σ, rispetto alle geodetiche trasformate dei meridiani, i raggi di C verranno a giacere nei piani tangenti di Σ e saranno invariabilmente legati, nel modo di Ribaucour, alle flessioni di quest'ultima superficie.

Oltre a queste soluzioni dell'attuale problema, se ne hanno altre di quasi immediata evidenza. In primo luogo quelle che si ottengono supponendo che i raggi di C escano in ogni piano tangente di Σ dal punto di contatto; nel qual caso, pel teorema di Weingarten, le superficie Σ saranno tutte e sole le evolute delle superficie d'area minima e delle superficie a curvatura costante. In secondo luogo, se alla congruenza C formata dalle normali di una superficie S a curvatura costante associamo la superficie Σ complementare della S rispetto ad un sistema di geodetiche uscenti da un punto, si avrà ancora, come subito si vede, una soluzione del problema [B].

La trattazione analitica completa della questione proposta ci dimostrerà che esistono, all'infuori di tutte quelle sopra osservate, altre interessanti soluzioni del problema [B], che conducono da una parte ad una classe di superficie applicabili, già completamente determinate da Weingarten, collegandole così colle superficie d'area minima, e d'altra parte precisamente a quella

(*) La citazione Mem.ª 1.ª si riferirà alla Memoria del Tom. III.

estensione dei teoremi di Guichard che Darboux ha conseguito, sostituendo alla quadrica di rotazione di Guichard una quadrica (immaginaria) tangente in un solo punto al circolo immaginario all'infinito (*). I risultati dell'accennata discussione sono i seguenti:

a) Quando la superficie S, normale ai raggi di C, debba mantenersi costantemente ad area minima, le superficie Σ che risolvono il problema [B] (escluse le evolute delle superficie minime) hanno necessariamente l'elemento lineare della forma:

$$d s^2 = d u^2 + [2 u - 2 v + a e^{-2v}] d v^2, \tag{I}$$

indicando a una costante arbitraria.

Per $a = 0$ questo elemento lineare appartiene alla complementare del paraboloide di rotazione e la congruenza C è quella associata al paraboloide nel teorema di Guichard (Mem.ª 1.ª). Per $a \neq 0$ l'elemento lineare (I) definisce precisamente quella classe di superficie applicabili, la cui determinazione completa è già stata effettuata da Weingarten (**). Il nesso geometrico che qui viene a stabilirsi fra queste superficie e quelle d'area minima rende meglio ragione del risultato conseguito da Weingarten.

b) Quando la superficie S debba mantenersi a curvatura costante $K = \frac{1}{A}$, il problema [B] (all'infuori delle soluzioni già sopra osservate nelle evolute e nelle complementari delle superficie a curvatura costante) possiede soltanto le due seguenti specie distinte di soluzioni:

1.° Le superficie Σ d'elemento lineare:

$$d s^2 = e^{2\tau} d u^2 + \left[a A + k e^{-2v} - \frac{a}{a+1} e^{2\tau}\right] d v^2, \tag{II}$$

con $\tau = a v - (a + 1) u$, essendo k, a due costanti arbitrarie, delle quali la seconda diversa da zero e da -1.

2.° Le superficie Σ d'elemento lineare:

$$d s^2 = e^{-2v} d u^2 + [2 (v - u) e^{-2v} - A] d v^2, \tag{III}$$

dipendente unicamente dal valore $\frac{1}{A}$ della curvatura di S.

(*) *Sur la déformation des surfaces du second degré* (Comptes rendus de l'Académie, 27 mars 1899).

(**) *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (Comptes rendus de l'Académie de Paris, Tom. CXII, pag. 607 e 706). Cf. Darboux, *Leçons*, etc., Tom. IV, pag. 308 e seg.

Fra le superficie (II) e (III) sono applicabili sopra superficie di rotazione soltanto le (II), *quando sia nulla la costante k.* Le congruenze C corrispondenti sono allora quelle particolari, di cui sopra abbiamo parlato, che si presentano nei teoremi di Guichard (Mem.ª 1.ª). Gli elementi lineari (II) e (III) appartengono, come già abbiamo accennato, a quadriche (immaginarie) di Darboux tangenti in un punto al circolo immaginario all'infinito; e più precisamente il caso (II) si distingue dal caso (III) per questo che nel primo la detta quadrica tocca soltanto, nel secondo invece oscula il circolo immaginario. In queste formole (II) e (III) sono dunque inclusi tutti e soli quegli elementi lineari *reali*, ai quali già il Darboux accenna nella indicata Nota, senza occuparsi della loro determinazione effettiva.

Nella seconda parte della presente Memoria si tratta il problema d'inversione. Supposta cioè data una superficie S ad area minima, ovvero a curvatura costante, si domanda di costruire le superficie Σ, cogli indicati elementi lineari (I), (II), (III), che stiano colla S nella relazione geometrica studiata e si dimostra che ogni volta da una superficie data S derivano per tal modo ∞^3 superficie Σ. Come nei casi particolari dei teoremi di Guichard (Mem.ª 1.ª), la ricerca delle superficie Σ derivate da una data superficie S dipende da un sistema illimitatamente integrabile di equazioni simultanee lineari alle derivate parziali. Se si fa astrazione dal caso (III), questo sistema è anzi precisamente lo stesso come nel caso particolare di Guichard, assumendo la notevole forma (A) (B) § 11; il caso generale si distingue dallo speciale solo per questo che nel primo è diversa da zero una delle costanti d'integrazione, la quale si annulla invece nel secondo.

Nel caso poi delle superficie Σ d'elemento lineare (III) i risultati sono ancora del tutto analoghi; ma il sistema delle equazioni differenziali di trasformazione si semplicizza e diventa il sistema (D) del § 12.

Allora si può dare a queste equazioni simultanee un significato geometrico molto notevole, in relazione coi sistemi tripli ortogonali più generali di superficie, nei quali una delle tre famiglie è composta di superficie a curvatura costante.

§ 1.

Le congruenze deformabili al modo di Ribaucour.

Sia data una superficie Σ flessibile ed inestendibile, ed in ogni suo piano tangente π si tracci una retta r, che si supporrà ivi invariabilmente fissata, sicchè la Σ nelle sue infinite flessioni trascinerà seco i suoi piani tangenti π colle rispettive rette r. Supposto che nel passaggio da un piano tangente al successivo varii con continuità la posizione di r, la doppia infinità di raggi r costituirà un'ordinaria congruenza C.

Quando la superficie Σ si flette, la congruenza C assumerà un'infinità di configurazioni diverse e noi diremo che essa si deforma *al modo di* Ribaucour.

Cominciamo dallo stabilire i teoremi fondamentali relativi a questo modo di deformazione delle congruenze, dovuti a Ribaucour stesso. A tale oggetto riferiamo la superficie Σ ad un sistema coordinato ortogonale (u, v), che fissiamo nel modo seguente. In ogni piano tangente π di Σ, dal punto M di contatto, abbassiamo la perpendicolare MP sul raggio r ivi tracciato, indicando con P il piede della detta perpendicolare sopra r. Le direzioni MP inviluppano sulla Σ un sistema ∞^1 di linee che prendiamo per linee $u =$ cost., assumendo poi a linee $v =$ cost. le traiettorie ortogonali. Siano ora

$$d s^2 = E\, d u^2 + G\, d v^2$$

$$D\, d u^2 + 2 D'\, d u\, d v + D''\, d v^2$$

le due forme quadratiche fondamentali della superficie Σ. Ritenendo poi le altre consuete notazioni (Mem.ª 1.ª § 1), indichiamo con x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali di un punto M mobile sopra Σ e con

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{matrix}$$

rispettivamente i coseni di direzione della terna ortogonale formata: 1.° dalla tangente alla linea $v =$ cost., 2.° dalla tangente alla linea $u =$ cost., 3.° dalla normale alla superficie Σ. Varranno allora le formole fondamentali che qui

occorre trascrivere:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,X_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,X_2\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2+\frac{D}{\sqrt{E}}X_3, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2+\frac{D'}{\sqrt{E}}X_3\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1+\frac{D'}{\sqrt{G}}X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1+\frac{D''}{\sqrt{G}}X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u}=-\frac{D}{\sqrt{E}}X_1-\frac{D'}{\sqrt{G}}X_2, \qquad \frac{\partial X_3}{\partial v}=-\frac{D'}{\sqrt{E}}X_1-\frac{D''}{\sqrt{G}}X_2\,.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Per definire completamente la congruenza C indichiamo ora con

$$\Lambda=\overline{MP}$$

il valore algebrico del segmento MP. Basterà evidentemente conoscere Λ in funzione di u, v per fissare perfettamente la congruenza C. Denotino ora

$$x_0,\ y_0,\ z_0$$

le coordinate di P; avremo

$$x_0=x+\Lambda X_2, \quad y_0=y+\Lambda Y_2, \quad z_0=z+\Lambda Z_2 \qquad (2)$$

e saranno X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione del raggio r della congruenza.

Introducendo poi le notazioni di Kummer col porre:

$$E'=\Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2, \quad F'=\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v}, \quad G'=\Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)^2$$

$$e=\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u}, \quad f=\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}, \quad f'=\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}, \quad g=\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v},$$

dalle (1), (2) troveremo:

$$\left.\begin{aligned}
&E'=\frac{D^2}{E}+\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2, \quad F'=\frac{DD'}{E}-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\\
&G'=\frac{D'^2}{E}+\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2,\\
&e=\frac{\Lambda}{\sqrt{EG}}DD'-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\Lambda}{\partial u},\\
&f=\frac{\Lambda}{\sqrt{EG}}DD''-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\Lambda}{\partial v}\right),\\
&f'=\frac{\Lambda}{\sqrt{EG}}D'^2+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\Lambda}{\partial u},\\
&g=\frac{\Lambda}{\sqrt{EG}}D'D''+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\Lambda}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Calcolando di qui i valori delle tre quantità fondamentali

$$E'G' - F'^2, \quad eG' - (f+f')F' + gE', \quad eg - ff'$$

e ponendo per abbreviare

$$M = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} D + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} D', \tag{4}$$

troveremo le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} E'G' - F'^2 &= \frac{M^2}{E}, \quad eg - ff' = \frac{\Delta}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\sqrt{G} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \right) D' - \frac{\partial \Delta}{\partial u} D'' \right\} . M \\ eG' - (f+f')F' + gE' &= \left\{ \left(\sqrt{G} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \right) D + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\Delta}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial u} \right) D' + \frac{\Delta \sqrt{E}}{G} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} D'' \right\} \cdot \frac{M}{E}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

§ 2.

Le congruenze normali ed il teorema di Ribaucour.

Supponasi ora che, in una sua particolare configurazione, la congruenza C sia normale. Per ciò è necessario e sufficiente che si abbia $f = f'$ (*), ossia per le (3), e per la formula di Gauss.

$$\Delta \sqrt{EG} . K = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \Delta}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \left(\sqrt{G} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \right), \tag{6}$$

indicando con K la curvatura assoluta della superficie Σ. Come si vede, questa condizione è indipendente dalla particolare configurazione di C e si ha per ciò il teorema: *Se la congruenza C è normale in una sua particolare configurazione, tale rimarrà in qualunque sua deformazione al modo di* Ribaucour.

Spingendo più avanti la ricerca, consideriamo ora una superficie S normale alla congruenza C e indichi μ il punto ove il raggio r di O interseca

---

(*) *Lezioni*, § 143.

(normalmente) la S. Se poniamo

$$\overline{P}\mu = T,$$

la funzione T di u, v sarà determinata dal suo differenziale totale (*)

$$d\,T = -\left(\Sigma X_1 \frac{\partial x_0}{\partial u}\right) d\,u - \left(\Sigma X_1 \frac{\partial x_0}{\partial v}\right) d\,v,$$

ossia per le (1), (2) dai valori delle sue derivate parziali:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = -\left(\sqrt{E} + \frac{\varLambda}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\varLambda}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}. \tag{7}$$

Come è naturale, scrivendo la condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varLambda}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E} + \frac{\varLambda}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = 0$$

si ritrova nuovamente la (6). Ma ciò che ora a noi importa di osservare è che nell'espressione di $d\,T$ entrano solo i coefficienti della prima forma fondamentale di Σ (oltre Λ) e per ciò il valore stesso della funzione T di u, v è affatto indipendente dalle flessioni di Σ. Resta quindi completato il teorema precedente coll'altro: *I punti μ ove i raggi r della congruenza C incontrano, in una particolare configurazione di C una superficie normale ai raggi, trasportati invariabilmente coi raggi nelle deformazioni di C, hanno sempre per luogo una superficie S ortogonale ai raggi stessi.*

È questa la proposizione di Ribaucour già enunciata nella prefazione.

Al fine di preparare le formole per la trattazione del problema [B], osserviamo ora che indicando con ξ, η, ζ le coordinate del punto μ ove il raggio r di C riesce normale alla S, si avranno le formole:

$$\xi = x_0 + T X_1, \quad \eta = y_0 + T Y_1, \quad \zeta = z_0 + T Z_1.$$

Se indichiamo quindi con

$$\overline{D}, \quad \overline{D}', \quad \overline{D}'',$$

i coefficienti della seconda forma fondamentale di S, avremo:

$$-\overline{D} = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial u}, \quad -\overline{D}' = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} =$$

$$= \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial u}, \quad -\overline{D}'' = \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial X_1}{d\,v},$$

(*) *Lezioni*, l. c.

ciò che dà per le precedenti:

$$-\overline{D}=T E'+e,\quad -\overline{D'}=T F'+f=T F'+f',\quad -\overline{D''}=T G'+g. \quad (8)$$

Se ora con r_1, r_2 indichiamo i raggi principali di curvatura di S, per la somma r_1+r_2 ed il prodotto $r_1 r_2$ abbiamo le formole:

$$r_1+r_2=\frac{2F'\overline{D'}-E'\overline{D''}-G'\overline{D}}{E'G'-F'^2}$$

$$r_1 r_2=\frac{\overline{D}\,\overline{D''}-\overline{D'}^2}{E'G'-F'^2},$$

che per le (8) si trasformano nelle altre:

$$\left.\begin{aligned} r_1+r_2&=2T+\frac{eG'-(f+f')F'+gE'}{E'G'-F'^2}\\ r_1 r_2&=T^2+T\,\frac{eG'-(f+f')F'+gE'}{E'G'-F'^2}+\frac{eg-ff'}{E'G'-F'^2}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

§ 3.

Risoluzione del problema [B] pel caso di una superficie S d'area minima.

Alla trattazione del nostro problema premettiamo un'osservazione che permette di semplificare i calcoli. Nelle espressioni delle quantità fondamentali (5) entra come fattore comune la quantità (4)

$$M=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D' \text{ (*)}.$$

Questa non può annullarsi in tutte le flessioni di Σ salvo quando sia

$$\frac{\partial E}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial u}=0,$$

cioè la Σ una sviluppabile. E poichè allora si ha $E'G'-F'^2=0$ anche le superficie S normali ai raggi della congruenza sono in questo caso svilup-

(*) Cf. Mem.ª 1.ª, § 2.

pabili. Intenderemo nel seguito sempre escluso questo caso ovvio che dà un'effettiva soluzione del problema [B] con $K=0$.

Ciò premesso, veniamo ora a trattare il problema [B] nell'ipotesi che la superficie S, normale alla congruenza C, si conservi sempre ad area minima. Dovremo dunque avere, per la prima delle (9):

$$2\,T(E'G'-F'^2)+e\,G'-(f+f')F'+g\,E'=0.$$

Questa, calcolata colla sostituzione degli effettivi valori (5), e liberata dal fattore M, si traduce nell'altra:

$$\left.\begin{aligned}&2\,T\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'\right)+\left(\sqrt{G}+\frac{\partial A}{\partial v}\right)D+\\&+\left(\frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial A}{\partial u}\right)D'+\frac{A\sqrt{E}}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D''=0,\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

che deve, per ipotesi, verificarsi in tutte le flessioni di Σ. Le considerazioni fondamentali svolte ai §§ 2, 3 Mem.ª 1.ª dimostrano che, essendo la (10) lineare omogenea in D, D', D'', dovranno separatamente annullarsi i coefficienti di D, D', D''; avremo cioè le tre equazioni di condizione:

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,\quad\frac{\partial A}{\partial u}=\frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\quad 2\,T\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\sqrt{G}+\frac{\partial A}{\partial v}=0.\quad(11)$$

La prima di queste ci dice che sulla Σ le linee $v=\text{cost.}$ debbono essere geodetiche; disponendo del parametro u, a meno di una costante additiva, si può dunque fare

$$E=1.$$

La seconda delle (11) integrata ci dà

$$\Lambda=\varphi(v)\sqrt{G},$$

essendo $\varphi(v)$ una funzione della sola v. Ma poichè escludiamo il caso $\Lambda=0$ che darebbe, pel teorema di Weingarten, come superficie Σ le evolute delle superficie d'area minima (*), disponendo convenientemente del parametro v, potremo fare

$$\varphi(v)=1,\quad\Lambda=\sqrt{G};$$

(*) La stessa cosa può naturalmente dedursi dalle equazioni superiori.

così la terza delle (11) diventa

$$2\,T\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\sqrt{G}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}=0. \tag{12}$$

Ora la condizione (6) § 2, che esprime trattarsi di una congruenza normale, ci dà

$$\sqrt{G}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2=0, \tag{13}$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=0,$$

da cui

$$G=V u+V_1, \tag{13*}$$

indicando V, V_1 due funzioni della sola v, delle quali la prima certamente non nulla perchè altrimenti sarebbe

$$\frac{\partial E}{\partial v}=0 \quad \frac{\partial G}{\partial u}=0$$

caso già sopra escluso.

La (12) diventa così

$$2\,T\,V+V'u+V'_1+2\,(V u+V_1)=0, \tag{12*}$$

gli accenti denotando derivazione rapporto a v. Ci rimane ora soltanto da esprimere che il valore di T tratto dalla (12*) soddisfa alle (7) § 2, che nel nostro caso diventano

$$\frac{\partial T}{\partial u}=-1, \quad \frac{\partial T}{\partial v}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial u}\cdot \tag{14}$$

Dalla prima di queste, combinata colla (12*), segue intanto $V'=0$, cioè $V=c$, con c costante non nulla. Ne risulta per T l'espressione

$$T=-u-\frac{2\,V_1+V'_1}{2\,c}$$

e la seconda delle (14) ci dà finalmente per determinare la funzione incognita V_1 l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$V''_1+2\,V'_1+c^2=0,$$

che ha per integrale generale

$$V_1=a\,e^{-2v}-\frac{c^2}{2}\,v+b,$$

indicando a, b due nuove costanti arbitrarie. Cangiando v in $v +$ cost. si può fare senz'altro $b = 0$ e l'elemento lineare della Σ risulta

$$d\,s^2 = d\,u^2 + \left(c\,u - \frac{c^2}{2}\,v + a\,e^{-2v}\right) d\,v^2. \tag{15}$$

Si vede subito che il cangiare il valore di c ha solo per effetto di mutare la Σ in una superficie omotetica (*). Non alteriamo dunque la generalità fissando a c un valore numerico; facendo $c = 2$, le nostre superficie Σ vengono dunque definite dalla forma

$$d\,s^2 = d\,u^2 + [2\,u - 2\,v + a\,e^{-2v}]\,d\,v^2 \tag{I}$$

dell'elemento lineare. La corrispondente congruenza C e la superficie minima S a questa ortogonale risultano poi definite, secondo le formole precedenti, dai valori seguenti per Λ, T:

$$\Lambda = \sqrt{G} = \sqrt{2\,u - 2\,v + a\,c^{-2v}}\,, \quad T = \frac{1}{2} + v - u. \tag{16}$$

§ 4.

Significato geometrico dell'equazione $\dfrac{\partial \log \varLambda}{\partial u} = \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}$.

Prima di passare all'esame delle soluzioni trovate pel problema [B], facciamo notare il significato geometrico della equazione media (11)

$$\frac{\partial \log \varLambda}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\,, \tag{a}$$

la quale si presenterà ancora nel caso di una superficie S a curvatura costante.

(*) Se nella (15) si muta u in $\frac{c}{2}\,u_1$, diventa infatti:

$$ds^2 = \frac{c^2}{4}\left\{d\,u^2 + \left[2\,(u - v) + \frac{4\,a}{c^2}\,e^{-2v}\right] d\,v^2\right\}.$$

In primo luogo tutte le congruenze (normali o no) per le quali si verifica la (a) appartengono ad una classe considerata da RIBAUCOUR (*) e caratterizzata dalla proprietà seguente:

Le congiungenti il punto M di contatto del piano π coi due fuochi F_1, F_2 sul raggio r, tracciato in π, segnano sopra Σ due direzioni coniugate.

Per dimostrarlo ricordiamo che le ascisse ρ_1, ρ_2 dei due fuochi, misurate sul raggio r a partire da P, sono le radici della equazione di 2.° grado (*Lezioni*, ecc., pag. 252):

$$(E' G' - F'^2)\rho^2 + \{ g E' - (f + f') F' + e G' \} \rho + e g - f f' = 0. \quad (17)$$

Se con x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 indichiamo le coordinate rispettive di F_1, F_2, avremo:

$$x_1 = x + \Lambda X_2 + \rho_1 X_1, \quad y_1 = y + \Lambda Y_2 + \rho_1 Y_1, \quad z_1 = z + \Lambda Z_2 + \rho_1 Z_1,$$
$$x_2 = x + \Lambda X_2 + \rho_2 X_1, \quad y_2 = y + \Lambda Y_2 + \rho_2 Y_1, \quad z_2 = z + \Lambda Z_2 + \rho_2 Z_1,$$

e per ciò i coseni delle due direzioni $M F_1$, $M F_2$ saranno rispettivamente proporzionali alle terne di binomii:

$$\Lambda X_2 + \rho_1 X_1, \quad \Lambda Y_2 + \rho_1 Y_1, \quad \Lambda Z_2 + \rho_1 Z_1$$
$$\Lambda X_2 + \rho_2 X_1, \quad \Lambda Y_2 + \rho_2 Y_1, \quad \Lambda Z_2 + \rho_2 Z_1.$$

D'altra parte, se coi simboli d, δ indichiamo rispettivamente i differenziali presi nelle rispettive direzioni $M F_1$, $M F_2$, i medesimi coseni saranno anche proporzionali ai binomii:

$$\sqrt{E} X_1 d u + \sqrt{G} X_2 d v, \quad \sqrt{E} Y_1 d u + \sqrt{G} Y_2 d v, \quad \sqrt{E} Z_1 d u + \sqrt{E} Z_2 d v$$
$$\sqrt{E} X_1 \delta u + \sqrt{G} X_2 \delta v, \quad \sqrt{E} Y_1 \delta u + \sqrt{G} Y_2 \delta v, \quad \sqrt{E} Z_1 \delta u + \sqrt{E} Z_2 \delta v;$$

ne deduciamo

$$d u : d v = \frac{\rho_1}{\sqrt{E}} : \frac{\Lambda}{\sqrt{G}}$$
$$\delta u : \delta v = \frac{\rho_2}{\sqrt{E}} : \frac{\Lambda}{\sqrt{G}}.$$

La condizione perchè le due dette direzioni siano coniugate sopra Σ si scrive

$$D\, d u\, \delta u + D' (d u\, \delta v + d v\, \delta u) + D''\, d v\, \delta v = 0,$$

(*) L. c.

ovvero

$$\frac{D}{E}\rho_1\rho_2 + \frac{D' A}{\sqrt{G}}(\rho_1+\rho_2) + \frac{D'' A^2}{G} = 0.$$

Questa, per la (17), si scrive:

$$\frac{D}{E}(eg - ff') - \frac{D' A}{\sqrt{EG}}\{gE' - (f+f')F' + eG'\} +$$

$$+ \frac{D'' A^2}{G}(E'G' - F'^2) = 0,$$

che, sostituendovi i valori (5), diventa

$$\left(\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)(D D'' - D'^2)\,\Lambda\, M = 0.$$

Essa è adunque identicamente verificata quando sussiste la (a), ciò che dimostra la proposizione enunciata.

Ma supponiamo di più che la nostra congruenza C sia normale, come è appunto il caso nelle applicazioni che dobbiamo fare nel presente lavoro, e sia S' una delle superficie ortogonali a C; diciamo allora che la equazione (a) acquista il significato geometrico seguente: *Esiste una semplice infinità di sistemi* ∞^2 *normali di circoli, ortogonali alla superficie S, e giacenti nei piani tangenti di* Σ.

Per dimostrarlo, si indichi con R il raggio (incognito) di un circolo tracciato nel piano π, ortogonale in μ alla superficie S; per le coordinate x_1, y_1, z_1 del centro di questo circolo avremo

$$x_1 = x + (\Lambda - R)X_2 + TX_1$$
$$y_1 = y + (\Lambda - R)Y_2 + TY_1$$
$$z_1 = z + (\Lambda - R)Z_2 + TZ_1.$$

Secondo le formole generali relative ai sistemi ciclici (*Lezioni*, ecc. Cap. XIII § 179), esprimiamo che il nostro sistema di circoli è un sistema normale. Applicando le dette formole col porre

$$\alpha_1 = X_1,\quad \beta_1 = Y_1,\quad \gamma_1 = Z_1$$
$$\alpha_2 = X_2,\quad \beta_2 = Y_2,\quad \gamma_2 = Z_2,$$

e sviluppando le condizioni d'integrabilità (equazioni (I), (II), (III), l. c., pag. 323), col tener conto delle (6), (7) § 2, troviamo le due condizioni

seguenti:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial v}=(\Lambda-R)\sqrt{EG}\,K$$

$$\left(\sqrt{G}+\frac{\partial A}{\partial v}\right)\frac{\partial R}{\partial u}-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}=-T\Lambda\sqrt{EG}\,K,$$

che risolute rispetto a $\frac{\partial R}{\partial u}$, $\frac{\partial R}{\partial v}$ danno per la (6) § 2:

$$\frac{\partial R}{\partial u}=\left(1-\frac{R}{A}\right)\frac{\partial A}{\partial u}-T\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial R}{\partial v}=\left(1-\frac{R}{A}\right)\left(\sqrt{G}+\frac{\partial A}{\partial v}\right)+T\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Se si scrive la condizione d'integrabilità per queste due equazioni simultanee nella nostra incognita R, si trova che essa si riduce appunto alla (a), ciò che dimostra il teorema enunciato.

§ 5.

Esame delle soluzioni trovate.

Ritornando ora alla discussione del § 3, vediamo che possiamo riassumerne i risultati col teorema:

Le uniche soluzioni del problema [B], *quando la superficie S ortogonale ai raggi della congruenza C debba conservarsi, in tutte le deformazioni di Σ, ad area minima sono date: 1.° dalle evolute Σ delle superficie ad area minima; 2.° dalle superficie di* Weingarten *d'elemento lineare*

$$ds^2=du^2+(2u-2v+a\,e^{-2v})\,dv^2, \qquad \text{(I)}$$

la congruenza C e la superficie minima S essendo definite dai valori (16) *di* Λ *e* T (*).

(*) Si osservi che cangiando u, v rispettivamente in $u+c$, $v+c$ (c costante) viene in (I) cangiato soltanto per un fattore positivo il valore della costante a. Se dunque $a \neq 0$ si può fare, senza alterare la generalità $a=\pm 1$.

Fra queste superficie d' elemento lineare (I) deve certamente figurare, per quanto si è detto nella prefazione, la complementare del paraboloide di rotazione, la quale può corrispondere solo al valore $a = 0$ della costante, poichè soltanto per $a = 0$ l'elemento lineare (I) appartiene ad una superficie di rotazione.

Constatiamo direttamente la cosa, e dimostriamo di più che la congruenza C è allora quella associata al paraboloide nel teorema di Guichard colle considerazioni seguenti. Intanto per $a = 0$ la superficie Σ d' elemento lineare (I) è certo applicabile sopra una superficie di rotazione e le linee $u - v = \text{cost.}$ sono le deformate dei paralleli. Se nel punto M di Σ tiriamo la tangente alla deformata del meridiano, la sua inclinazione θ sulle $v = \text{cost.}$ è data da

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\cdot$$

Denotando quindi con N il punto ove questa tangente interseca il raggio r della congruenza, abbiamo

$$\overline{MP} = \sqrt{G}, \quad \overline{PN} = G$$

$$\overline{MN}^2 = G^2 + G.$$

D'altra parte, se con ρ indichiamo il raggio di curvatura geodetica delle linee $u - v = \text{cost.}$ sopra Σ, troviamo:

$$\rho^2 = G^2 + G = \overline{MN}^2.$$

Di qui, avendo anche riguardo ai segni, si conclude che il punto N è il centro di curvatura geodetica della deformata del parallelo uscente da M. Dunqne la superficie Σ' luogo di N è la complementare di Σ rispetto alle deformate dei meridiani. Ora i raggi di C escono dai punti N di Σ e sono (come risulta dalle proprietà delle superficie complementari) normali alle deformate dei paralleli sopra Σ', mentre la superficie S normale a C si mantiene ad area minima in tutte le flessioni di Σ, ovvero in tutte le flessioni di Σ'; pei teoremi della Mem.ª 1.ª (§ 3) ne segue che la Σ' è applicabile sul paraboloide di rotazione e la C è la sua congruenza associata.

Dimostriamo in fine una notevole proprietà che, in tutte le soluzioni trovate, ha luogo nella corrispondenza fra i punti della superficie minima S e quelli della Σ, proprietà contenuta nel teorema:

Ad ogni sistema ortogonale sulla superficie minima S corrisponde un sistema coniugato sulla superficie Σ di WEINGARTEN.

Poichè la rappresentazione della superficie minima S sulla sfera di GAUSS è conforme, basterà dimostrare che sussistono le proporzioni:

$$E' : F' : G' = D : D' : D''.$$

Ora, essendo qui $E = 1$, le (3) § 1 ci danno

$$E' = D^2, \quad F' = D D', \quad G' = D'^2 + \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2$$

e il valore di G', a causa della (13) § 3, può scriversi

$$G' = D'^2 - \sqrt{G}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = D'^2 + K\,G = D\,D'';$$

dunque

$$E' = D^2, \quad F' = D D', \quad G' = D D'',$$

ciò che dimostra il teorema.

§ 6.

CASO DI UNA SUPERFICIE S A CURVATURA COSTANTE.

Veniamo ora a trattare il problema fondamentale [B] pel caso in cui la superficie S debba mantenersi a curvatura costante K e poniamo

$$K = \frac{1}{A},$$

dove A sarà una costante non nulla.

Dovremo avere $r_1 r_2 = A$, cioè per la seconda delle (9) § 2:

$$(T^2 - A)(E' G' - F'^2) + T\,\{e\,G' - (f + f')\,F' + g\,E'\} + e\,g - f f' = 0$$

e questa equazione dovrà, per ipotesi, sussistere in tutte le flessioni di Σ. Ora, se sostituiamo nella precedente i valori (5) § 1, indi sopprimiamo il fattore comune M (Cf. § 3), resta una relazione lineare omogenea in D, D', D'', nella quale dunque dovranno annullarsi i singoli coefficienti di D, D', D''. Escludendo il caso $\Lambda = 0$, che conduce alle superficie Σ evolute delle su-

perficie a curvatura costante, otteniamo così le tre equazioni:

$$T\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\sqrt{G}\frac{\partial \Delta}{\partial u} \tag{18}$$

$$(T^2-A)\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+T\left(\sqrt{G}+\frac{\partial \Delta}{\partial v}\right)=0 \tag{19}$$

$$(T^2-A)\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+T\left(\frac{\Delta}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial \Delta}{\partial u}\right)+\frac{\Delta\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial \Delta}{\partial v}\right)=0. \tag{20}$$

Siccome per la (18) deve essere

$$T^2\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=T\frac{\partial \Delta}{\partial u},$$

possiamo alla (20) sostituire l'altra:

$$T\Lambda\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\Lambda\sqrt{E}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial \Delta}{\partial v}\right)-A\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0. \tag{20*}$$

Moltiplicando quest'ultima per $\frac{T}{\Delta\sqrt{E}}$ e sottraendo dalla (19) deduciamo

$$\frac{A\,T}{\Delta\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{A}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

ossia per la (18) e perchè $A \neq 0$:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}, \tag{19*}$$

che è la stessa relazione già ritrovata al § 3 pel caso di una superficie S d'area minima e della quale al § 4 abbiamo stabilito il significato geometrico.

Dalle (19*) e disponendo del parametro v (essendo escluso il caso del Weingarten $\Lambda=0$), potremo fare come al § 3

$$\Lambda=\sqrt{G}, \tag{21}$$

dopo di che le (18), (20*) diventano

$$T\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \tag{22}$$

$$T\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\sqrt{E}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\right)-\frac{A}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0. \tag{23}$$

Basta aggiungere a queste ultime le due equazioni (7) § 2, cioè

$$\frac{\partial T}{\partial u} = -\sqrt{E} - \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \tag{24}$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \tag{25}$$

per avere espresse tutte le condizioni del nostro problema. La sua risoluzione si otterrà dunque determinando, nel modo più generale, le tre funzioni incognite T, E, G in guisa da soddisfare le quattro ultime equazioni ed assumendo poi, secondo la (21), $\Lambda = \sqrt{G}$. Ora la (25), paragonata colla (22), ci dà

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{T}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

da cui integrando

$$T = U\sqrt{E},$$

essendo U una funzione della sola u.

Ora noi escludiamo il caso $U = 0$ o $T = 0$, perchè esso condurrebbe, come subito si vede, a quella soluzione già osservata del problema [B], nella quale la superficie Σ è la complementare della superficie S a curvatura costante rispetto ad un sistema di geodetiche uscenti da un punto (Cf. prefazione). Disponendo del parametro u, potremo dunque fare $U = 1$, cioè

$$T = \sqrt{E}. \tag{26}$$

Dopo di ciò ci resterà da determinare E, G in guisa da soddisfare le tre equazioni

$$\sqrt{E} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \sqrt{G} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \tag{22*}$$

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v} + \sqrt{G} - \frac{A}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v} = 0 \tag{23*}$$

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \sqrt{E} = 0. \tag{24*}$$

Quest'ultima ha per integrale generale

$$\sqrt{E} = e^{\psi(v-u)-u},$$

indicando ψ una funzione arbitraria dell'argomento $v - u$. Le due precedenti

diventano quindi:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u} &= 2\, e^{2\psi(v-u)-2u}\,\psi' \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= 2\,(A - e^{2\psi(v-u)-2u})\,\psi' - 2\,G,\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

ove gli accenti indicano derivazione rispetto all'argomento $v - u$. La condizione d'integrabilità della (27) ci dà

$$\psi'' = 0$$

e quindi

$$\psi(v-u) = a(v-u) + b,$$

essendo a, b due costanti arbitrarie. Di queste la prima dovrà supporsi non nulla per non ricadere nel caso escluso

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

e la seconda invece si potrà rendere zero, senza nuocere alla generalità, bastando a tale scopo aumentare u o v di una conveniente costante.

§ 7.

Forma dell'elemento lineare di Σ.

Le soluzioni più generali del problema [B] nel caso attuale si ottengono dunque colle formole

$$\Lambda = \sqrt{G}, \quad T = \sqrt{E},$$

assumendo

$$\sqrt{E} = e^{av-(a+1)u},$$

con a costante arbitraria non nulla e determinando G dal sistema integrabile:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u} &= 2\,a\, e^{2[av-(a+1)u]} \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= 2\,a\,\{A - e^{2[av-(a+1)u]}\} - 2\,G.\end{aligned}\right\} \qquad (27^*)$$

Per compiere l'integrazione occorre evidentemente distinguere il caso in cui $a \neq -1$ dal caso $a = -1$.

1.° caso $a \neq -1$. Allora la soluzione più generale delle (27*) è data da

$$G = k\,e^{-2v} + a\,A - \frac{a}{a+1}\,e^{2[av-(a+1)u]},$$

ove k è una costante arbitraria.

La superficie Σ ha dunque l'elemento lineare

$$d\,s^2 = e^{2[av-(a+1)u]}\,d\,u^2 + \left\{a\,A + k\,e^{-2v} - \frac{a}{a+1}\,e^{2[av-(a+1)u]}\right\}d\,v^2. \qquad \text{(II)}$$

Si osserverà che aumentando u, v di costanti in guisa che non cangi il binomio $a\,v - (a+1)\,u$, si può moltiplicare k per un fattore qualsiasi positivo. Se dunque $k \neq 0$ si potrà fare, senza alterare la generalita, $k = \pm 1$.

2.° caso $a = -1$. Allora le (24*) integrate danno

$$G = 2\,(v-u)\,e^{-2v} + k\,e^{-2v} - A,$$

essendo k una costante, che si può fare senz'altro nulla aumentando u di $\frac{k}{2}$.

L'elemento lineare di Σ diventa quindi in questo caso

$$d\,s^2 = e^{-2v}\,d\,u^2 + \{2\,(v-u)\,e^{-2v} - A\}\,d\,v^2. \qquad \text{(III)}$$

Concludiamo adunque: *Quando la superficie S debba avere la curvatura costante* $K = \frac{1}{A}$ *il problema* [B], *oltre le soluzioni fornite dalle evolute e dalle complementari delle superficie a curvatura costante, ammette unicamente le due specie di soluzioni definite dalla forma* (II) *o* (III) *dell'elemento lineare di* Σ, *insieme colle formole*

$$\Lambda = \sqrt{G}, \quad T = \sqrt{E}.$$

§ 8.

Esame delle soluzioni trovate.

Osserviamo una semplice formola per la curvatura K delle superficie Σ d'elemento lineare (II) o (III), che risulta dal calcolo diretto, ovvero dalle osservazioni seguenti. Se dalla (23*) § 6 e dalla (6) § 2:

$$G\sqrt{E}\,K=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial A}{\partial v}\right)$$

si elimina $\sqrt{G}+\frac{\partial A}{\partial v}$, tenendo conto della relazione

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},$$

si trova

$$K=\frac{A}{G^2}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\right)^2.$$

Ne segue che per la forma (II) dell'elemento lineare si ha:

$$K=\frac{A\,a^2}{G^2} \tag{28}$$

e più in particolare per la (III)

$$K=\frac{A}{G^2}\cdot \tag{28*}$$

Con queste formole si vede subito che le corrispondenti superficie Σ saranno applicabili sopra superficie di rotazione nel solo caso dell'elemento lineare (II), quando sia inoltre $k=0$ (*).

In tal caso, con un processo del tutto analogo a quello del § 5, si dimostrerà che i raggi della congruenza C escono dai punti della superficie complementare Σ', normalmente alle deformate dei paralleli, e sono invariabil-

(*) Basta per ciò calcolare il parametro differenziale primo $\Delta_1 G$, che in questo solo caso risulta funzione di G stessa.

mente legati alle flessioni di Σ'. E poichè la superficie S normale a C si conserva sempre a curvatura costante, segue dalle ricerche della Mem. I che queste particolari soluzioni del problema [B] sono tutte e sole quelle che corrispondono ai teoremi di GUICHARD.

Dimostriamo ora una notevole proprietà della corrispondenza fra i punti di Σ e di S che ha luogo in tutte le soluzioni trovate del problema [B] e tiene qui le veci di quella segnalata alla fine del § 5 per le superficie d'area minima e quelle derivate di WEINGARTEN. Diciamo che: *Alle assintotiche della superficie Σ corrispondono le assintotiche di S, cioè ai sistemi coniugati dell'una superficie i sistemi coniugati sull'altra.*

Per provarlo basterà verificare che sussistono le proporzioni:

$$\overline{D} : \overline{D'} : \overline{D''} = D : D' : D'',$$

le quali, pei valori (8) § 2 di $\overline{D}$, $\overline{D'}$, $\overline{D''}$, si traducono nelle due equazioni

$$T(E'D' - F'D) + eD' - fD = 0$$
$$T(G'D' - F'D'') + gD' - f'D'' = 0.$$

A causa delle (3) § 1 la prima, soppresso il fattore M, diventa

$$T\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial u}$$

e coincide colla (18) § 6, mentre la seconda si cangia nell'altra

$$T\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 - KG\right\} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial A}{\partial u}\right) = 0,$$

che è pure identicamente verificata, in virtù delle formole del § 6.

§ 9.

LE QUADRICHE DI DARBOUX D'ELEMENTO LINEARE (II) E (III).

Andiamo ora a verificare che gli elementi lineari (II) e (III), come già venne enunciato nella prefazione, appartengono a particolari quadriche (immaginarie) tangenti in un solo punto al circolo immaginario all' infinito.

Per abbreviare, daremo qui senz' altro le formole effettive senza riprodurre il processo piuttosto lungo che ha servito a stabilirle.

Le coordinate x, y, z di un punto mobile sulla quadrica di Darboux d'elemento lineare (II) sono date dalle formole:

$$x = \frac{e^{\tau}}{a+1}, \quad y + iz = -e^{-v}, \quad y - iz = aAe^{v} - ke^{-v} - \frac{a}{(a+1)^2} e^{2\tau+v} \qquad (\alpha)$$

$$(\tau = av - (a+1)u).$$

Se si calcola l'elemento lineare

$$ds^2 = dx^2 + (dy + i\,dz)(dy - i\,dz)$$

si verifica subito che assume precisamente la forma (II); d'altra parte l'eliminazione di u, v fra le (α) conduce all'equazione della superficie

$$y^2 + z^2 - ax^2 - k(y+iz)^2 + aA = 0, \qquad (\beta)$$

che appartiene appunto alle quadriche di Darboux (*).

Similmente le formole:

$$\left.\begin{aligned} x &= (u-v)e^{-v}, \quad y + iz = -e^{-v}, \\ y - iz &= e^{-v}(u-v+1)^2 - Ae^{v} - 2e^{-v} \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

definiscono la quadrica

$$x^2 + 2z^2 - 2xy - 2ixz - 2iyz - A = 0 \qquad (\delta)$$

coll' elemento lineare (III).

Volendo ora meglio precisare il modo di comportarsi della quadriche (β), (δ) rispetto al circolo immaginario all' infinito, osserviamo che l' equazione della loro rispettiva conica nel piano all' infinito sarà:

$$-ax^2 + (1-k)y^2 + (1+k)z^2 - 2kiyz = 0 \qquad (\beta^*)$$

per la prima e

$$x^2 + 2z^2 - 2xy - 2ixz - 2iyz = 0 \qquad (\delta^*)$$

per la seconda. Paragonandole con quella del cerchio all' infinito

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

si potranno applicare i noti criterii che risultano dal calcolo dei valori degli invarianti simultanei della conica che si considera e del detto cerchio. Così

(*) L. c.

adoperando le notazioni della geometria analitica del Salmon (Cap. XI della *Analytische Geometrie der Kelgelschnitte*) avremo nel primo caso

$$\Delta = 1, \quad \Theta = a - 2, \quad \Theta' = 1 - 2a, \quad \Delta' = a$$

e nel secondo

$$\Delta = \Delta' = 1, \quad \Theta = \Theta' = 3,$$

onde si deduce che la prima conica tocca soltanto e la seconda oscula il circolo all' infinito. Alla medesima conclusione si arriva osservando che le coordinate x, y, z di un punto sul detto circolo si esprimono in funzione razionale di un parametro λ colle formole

$$x : y : z = i(1 - \lambda^2) : 2i\lambda : 1 + \lambda^2.$$

Sostituendo in (β^*) o in (δ^*) otteniamo nel primo caso l' equazione di 4.° grado in λ:

$$(a + k + 1)\lambda^4 + 4k\lambda^3 + (6k - 2a - 2)\lambda^3 + 4k\lambda + a + k + 1 = 0$$

e nel secondo l' altra

$$\lambda^4 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 3 = 0.$$

Ora la prima ha la radice doppia $\lambda = -1$ e le altre due date dalla equazione di 2.° grado

$$(a + k + 1)\lambda^2 + 2(k - a - 1)\lambda + k + a + 1 = 0,$$

che sono certo diverse da -1 poichè $a \neq -1$ e diverse inoltre fra loro finchè $k \neq 0$. In questo caso adunque la quadrica (β) tocca in un solo punto il circolo all' infinito e solo per $k = 0$, diventando superficie di rotazione, è bitangente. La seconda equazione di 4.° grado in λ ha la radice *tripla* $\lambda = -1$ e la semplice $\lambda = 3$. Dunque la quadrica (δ) oscula in un punto il circolo immaginario all' infinito, come avevamo asserito.

§ 10.

Il problema d' inversione.

Secondo i risultati ottenuti fin qui, da ogni superficie nota Σ d'elemento lineare (I) di Weingarten si deduce, con una costruzione geometrica determinata, una superficie S d' area minima e analogamente da ogni superficie

nota di elemento lineare (II) o (III) una superficie a curvatura costante $K = \frac{1}{A}$.

Vogliamo ora occuparci della inversione di questi risultati, proponendoci il problema: *Data una superficie S ad area minima, ovvero una superficie S a curvatura costante, condurre per ogni sua normale un conveniente piano in guisa che l'inviluppo di questi* ∞^2 *piani risulti una superficie* Σ *d'elemento lineare* (I) *di* WEINGARTEN *nel primo caso, ovvero una superficie d'elemento lineare* (II) *o* (III) *nel secondo, ed inoltre la dipendenza geometrica fra S e* Σ *sia precisamente quella avanti studiata.*

Trattando della inversione dei teoremi di GUICHARD, ho già risoluto il problema proposto nel caso in cui la Σ debba essere applicabile sopra una superficie di rotazione, cioè per l'elemento lineare (I) quando $a = 0$ e per l'elemento lineare (II) per $k = 0$ (*). Si è visto allora che ogni volta da una superficie data S derivano ∞^3 superficie Σ e la loro ricerca dipende dalla integrazione di un sistema illimitamente integrabile di equazioni lineari simultanee alle derivate parziali.

Un risultato perfettamente analogo troveremo ora nel caso generale; ed anzi quando l'elemento lineare di Σ debba avere la forma (I), o la (II), il sistema delle equazioni differenziali fondamentali rimane precisamente lo stesso come nel caso speciale sopra ricordato. Le soluzioni del caso generale si distinguono da quelle del caso speciale solo pel valore da attribuirsi ad una delle costanti d'integrazione. Risultati del tutto analoghi si hanno ancora, come si vedrà, nel caso delle superficie Σ d'elemento lineare (III).

Per stabilire direttamente il sistema delle equazioni differenziali pel problema d'inversione dovremmo procedere come nel caso speciale già trattato al Cap. III Mem.ª 1.ª traducendo analiticamente le proprietà, stabilite ai §§ 5, 8, della corrispondenza fra i punti di S e di Σ. In questo dovremmo principalmente applicare le formole generali relative ai sistemi ciclici, ricordando (§ 4) che esistono sistemi ∞^2 normali di circoli ortogonali alla S e giacenti nei piani tangenti di Σ. Ma per abbreviare, ci limiteremo qui a scrivere senz'altro il sistema delle indicate equazioni fondamentali, procedendo poi su di esso alla verifica delle proprietà enunciate.

(*) V.ⁱ Mem.ª 1ª e Nota del settembre 1899 *(Rendiconti Lincei)*, dove queste equazioni trovansi date nella forma attuale. Per altro le equazioni stesse erano già state da me stabilite nelle anteriori note del 19 febbraio e 5 marzo 1899 *(Rendiconti Lincei)*. Posteriormente vennero date anche dal DARBOUX (l. c.).

Riguarderemo in ciò che segue le superficie d'area minima e quelle di curvatura costante, insieme colle loro parallele, come appartenenti ad una unica classe di superficie W, nelle quali i raggi principali di curvatura r_1, r_2 sono legati da una relazione bilineare simmetrica

$$a\, r_1 r_2 + b\,(r_1 + r_2) + c = 0, \tag{F}$$

a coefficienti a, b, c costanti. Inversamente, se una superficie W appartiene a questa classe, avrà una superficie parallela ad area minima (quando $a = 0$), ovvero una parallela a curvatura costante (quando $a \neq 0$).

§ 11.

Il sistema delle equazioni differenziali pel problema d'inversione.

Ciò premesso, abbiasi ora una superficie S, riferita ad un sistema qualunque di coordinate curvilinee u, v, e siano

$$E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

le sue due forme quadratiche fondamentali (Lezioni Cap. IV). Indicando con Φ, W due funzioni incognite di u, v e con α, β, γ tre costanti, si consideri il seguente sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali per Φ, W:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{11} &= (\alpha E + \beta D)\,\Phi + (\beta E + \gamma D)\,W \\ \Phi_{12} &= (\alpha F + \beta D')\,\Phi + (\beta F + \gamma D')\,W \\ \Phi_{22} &= (\alpha G + \beta D'')\,\Phi + (\beta G + \gamma D'')\,W\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{GD - FD'}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{ED' - FD}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{GD' - FD''}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{ED'' - FD'}{EG - F^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v},\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

dove Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22} sono le derivate seconde covarianti della funzione Φ, calcolate rispetto alla prima forma fondamentale.

Scrivendo le condizioni d'integrabilità pel sistema delle equazioni simultanee (A), (B), col tener conto della equazione di Gauss e delle equazioni

di Codazzi, si trova che esse risulteranno tutte soddisfatte quando fra la curvatura assoluta

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}$$

e la curvatura media

$$H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

della superficie S sussista la relazione lineare intera

$$(\gamma + 1) K - \beta H + \alpha = 0 \text{ (*)}. \tag{29}$$

Questa è appunto una relazione della forma (F) fra r_1, r_2. Viceversa data una superficie S, i cui raggi principali di curvatura verifichino una relazione

$$a r_1 r_2 + b (r_1 + r_2) + c = 0, \tag{F}$$

basterà prendere le costanti α, β, γ in guisa che sia

$$\alpha : -\beta : \gamma + 1 = a : b : c$$

perchè la (29) coincida colla (F); con ciò evidentemente una delle tre costanti α, β, γ resterà arbitraria, le altre due esprimendosi in funzione lineare intera di questa.

Supponiamo che la superficie S appartenga alla classe (F) e le costanti α, β, γ siano scelte nel modo superiore. Allora il sistema delle equazioni fondamentali (A), (B) sarà illimitatamente integrabile e nella sua soluzione più generale (Φ, W) entreranno quindi quattro costanti arbitrarie, per le quali potremo prendere i valori di:

$$\Phi,\ W,\ \frac{\partial \Phi}{\partial u},\ \frac{\partial \Phi}{\partial v}$$

per un sistema iniziale (u_0, v_0) di valori delle variabili indipendenti u, v.

(*) In un solo caso l'equazione (29) del testo risulta identica e cioè quando:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = -1.$$

Allora il sistema (A), (B) è illimitatamente integrabile per qualsiasi superficie e si cangia nelle equazioni fondamentali della teoria delle superficie (*Lezioni*, ecc. Cap. IV, pag. 88-89), quando si faccia rispettivamente:

$$\Phi = x,\ y,\ z$$
$$W = -X,\ -Y,\ -Z.$$

Il sistema differenziale (A), (B) gode di un'importante proprietà che conviene subito osservare. Siano (Φ, W), (Φ_1, W_1) due coppie, distinte o coincidenti, di soluzioni; si consideri il parametro differenziale misto $\nabla(\Phi, \Phi_1)$ delle due prime funzioni Φ, Φ_1, calcolato rispetto alla prima forma fondamentale di S. Se si costruisce l'espressione:

$$\Omega = \nabla(\Phi, \Phi_1) - \alpha \Phi \Phi_1 - \beta(\Phi W_1 + \Phi_1 W) - \gamma W W_1,$$

si verifica subito che, in forza delle equazioni differenziali stesse (A), (B), sono identicamente nulle le derivate di Ω:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v};$$

si ha quindi:

$$\nabla(\Phi, \Phi_1) = \alpha \Phi \Phi_1 + \beta(\Phi W_1 + \Phi_1 W) + \gamma W W_1 + \text{cost.}$$

In particolare, facendo

$$\Phi_1 = \Phi, \quad W_1 = W,$$

s'avrà l'equazione importante:

$$\Delta_1 \Phi = \alpha \Phi^2 + 2\beta \Phi W + \gamma W^2 + c, \tag{C}$$

indicando c una costante.

§ 12.

Continuazione.

Dal sistema (A), (B) si può passare ad un sistema, in apparenza più generale, cangiandovi rispettivamente Φ, W in

$$\Phi + k, \quad W + k',$$

con k, k' costanti. Con questo cangiamento non si alterano le equazioni del sistema (B), mentre in quelle del sistema (A) vengono ad aggiungersi ordinatamente ai secondi membri i rispettivi termini

$$m E + n D, \quad m F + n D', \quad m G + n D'',$$

con m, n costanti date da

$$m = \alpha k + \beta k'$$

$$n = \beta k + \gamma k'.$$

Se il determinante $\alpha\gamma - \beta^2$ non è nullo, è evidente che scegliendo convenientemente k, k' possiamo fare acquistare ad m, n valori prefissati qualunque. Il sistema (A) diventa allora

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{11} &= (\alpha E + \beta D)\,\Phi + (\beta E + \gamma D)\,W + m E + n D\\ \Phi_{12} &= (\alpha F + \beta D')\,\Phi + (\beta F + \gamma D')\,W + m F + n D'\\ \Phi_{22} &= (\alpha G + \beta D'')\,\Phi + (\beta G + \gamma D'')\,W + m G + n D'',\end{aligned}\right\}\qquad (A^*)$$

rimanendo lo stesso il sistema (B).

Ma si riscontra subito che in tutti i casi, anche se $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, il sistema delle equazioni simultanee (A*), (B) è illimitatamente integrabile, *qualunque siano m, n*, purchè si supponga sempre verificata la (29).

Osserviamo poi che per il sistema (A*), (B) l'equazione (C) diventa:

$$\Delta_1\Phi = \alpha\Phi^2 + 2\beta\Phi W + \gamma W^2 + 2m\Phi + 2nW + c. \qquad (C^*)$$

Ed ora suppongasi in particolare che si tratti di una superficie S a curvatura costante K e facciasi nel sistema (A*) $\beta = 0$, $\gamma = 0$, indi per le (29) $\alpha = -K$; cangiando poi Φ in $\Phi + \frac{m}{K}$ si potrà rendere, senza alterare la generalità, $m = 0$ ed avremo così il sistema illimitatamente integrabile, con un'unica funzione incognita Φ:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{11} &= -KE\Phi + nD\\ \Phi_{12} &= -KF\Phi + nD'\\ \Phi_{22} &= -KG\Phi + nD''.\end{aligned}\right\}\qquad (D)$$

Presa una soluzione Φ di questo sistema, si avrà dalle (B) la W con una quadratura e l'equazione (C*) diventerà nel caso attuale:

$$\Delta_1\Phi = 2nW - K\Phi^2 + c. \qquad (E)$$

Dimostreremo nei prossimi paragrafi che il sistema delle equazioni (A), (B) è quello delle equazioni fondamentali pel problema d'inversione quando la S sia ad area minima, ovvero a curvatura costante (o parallela ad una tale superficie) e l'elemento lineare di Σ abbia la forma (I) di Weingarten o la forma (II). Nel caso invece che la S sia a curvatura costante K e la Σ debba avere l'elemento lineare (III), il sistema delle equazioni fondamentali sarà precisamente il sistema (D). Quanto alla costruzione geometrica che fa

passare da una superficie S nota alle Σ, si dimostrerà che essa si ottiene nel modo seguente:

Si consideri una coppia qualsiasi (Φ, W) *di soluzioni del sistema* (A), (B), *ovvero una soluzione* Φ *del sistema* (D); *i piani normali alle linee* $\Phi =$ cost. *della superficie S inviluppano la superficie Σ richiesta.*

§ 13.

Calcolo della superficie Σ inviluppo.

Per compiere le verifiche delle proprietà testè enunciate ci occorre in primo luogo calcolare le coordinate ξ, η, ζ del punto μ, ove il piano π normale alla linea $\Phi =$ cost. sulla S in un punto $M \equiv (x, y, z)$ di questa tocca la superficie inviluppo Σ. Ci serviremo perciò di alcune formole generali che potranno riuscire utili in altri casi analoghi.

I coseni di direzione X', Y', Z' della normale al piano π, ossia della tangente alla linea $\Phi =$ cost. sopra S, sono dati dalle formole:

$$X' = \rho\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right), \quad Y' = \rho\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right),$$

$$Z' = \rho\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right),$$

indicando ρ un fattore di proporzionalità. Ne segue che la tangente alla S giacente nel piano π ha i suoi coseni di direzione proporzionali alle tre espressioni

$$\nabla(x, \Phi), \quad \nabla(y, \Phi), \quad \nabla(z, \Phi)$$

ed in conseguenza si può porre

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + P\nabla(x, \Phi) + Q X_3 \\ \eta &= y + P\nabla(y, \Phi) + Q Y_3 \\ \zeta &= z + P\nabla(z, \Phi) + Q Z_3, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

dove P, Q sono convenienti funzioni di u, v e X_3, Y_3, Z_3 indicano i coseni direzione della normale alla S.

Per calcolare P, Q conviene tener conto di questo che X', Y', Z' debbono coincidere appunto coi coseni di direzione della normale alla superficie Σ, definita dalle (30), cioè debbono sussistere le due equazioni:

$$\Sigma X' \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \Sigma X' \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0. \tag{31}$$

Ora dalle due identità:

$$\Sigma \nabla(x, \Phi) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \Sigma \nabla(x, \Phi) \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \tag{32}$$

derivando e tenendo conto delle equazioni che danno le derivate seconde delle x, y, z [*Lezioni*, pag. 88 (I)], otteniamo le altre

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma \frac{\partial \nabla(x, \Phi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = \Phi_{11}, \quad \Sigma \frac{\partial \nabla(x, \Phi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = \Phi_{22} \\ &\Sigma \frac{\partial \nabla(x, \Phi)}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial \nabla(x, \Phi)}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = \Phi_{12}. \end{aligned}\right\} \tag{32*}$$

Avuto riguardo a queste identità, le (31) ci danno per calcolare P, Q le due equazioni lineari:

$$P\left(\Phi_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \Phi_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + Q\left(D' \frac{\partial \Phi}{\partial u} - D \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + E \frac{\partial \Phi}{\partial v} - F \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$$

$$P\left(\Phi_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \Phi_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + Q\left(D'' \frac{\partial \Phi}{\partial u} - D' \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + F \frac{\partial \Phi}{\partial v} - G \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0,$$

dalle quali si dedurranno nel caso generale le espressioni di P, Q. Ma nel caso nostro speciale, sussistendo le formole del sistema (A), ovvero quelle del sistema (D), ne risultano per P, Q valori assai semplici. Poichè infatti Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22} sono le medesime combinazioni lineari ed omogenee delle coppie di quantità

$$(E, D), \quad (F, D'), \quad (G, D''),$$

dovranno annullarsi le tre espressioni (linearmente dipendenti fra loro):

$$P\Phi_{11} - QD + E, \quad P\Phi_{12} - QD' + F, \quad P\Phi_{22} - QD'' + G.$$

Se distinguiamo il caso del sistema (A) da quello del sistema (D), troviamo nel primo caso

$$P = -\frac{1}{\alpha\Phi + \beta W}, \quad Q = -\frac{\beta\Phi + \gamma W}{\alpha\Phi + \beta W}$$

e nel secondo

$$P = \frac{1}{K\Phi}, \quad Q = \frac{n}{K\Phi}.$$

Dunque: Le coordinate ξ, η, ζ di un punto mobile sulla superficie Σ inviluppo saranno date, nel caso del sistema (A), dalle formole seguenti:

$$\xi = x - \frac{1}{\alpha\Phi + \beta W}\left[\nabla(x, \Phi) + (\beta\Phi + \gamma W) X_3\right] \tag{33}$$

colle analoghe per η, ζ dedotte con permutazione circolare delle lettere (ξ, η, ζ), (x, y, z), (X_3, Y_3, Z_3); nel caso del sistema (D) si avranno invece le altre:

$$\xi = x + \frac{1}{K\Phi}\{\nabla(x, \Phi) + n X_3\}. \tag{33*}$$

§ 14.

La superficie Σ inviluppo nel caso di una superficie S ad area minima.

Trattasi ora in primo luogo di verificare che la superficie Σ, definita dalle formole (33) o (33*), avrà l'elemento lineare (I) di Weingarten quando la S è ad area minima; l'elemento lineare (II) se, essendo la S a curvatura costante $K = \frac{1}{A}$, si adopera il sistema differenziale (A), (B) § 11 ed in fine l'elemento lineare (III) quando Φ sia una soluzione del sistema (D) § 12. In secondo luogo dovremo constatare che la relazione geometrica fra S e Σ è precisamente quella studiata nella prima parte della Memoria.

Nel presente paragrafo ci occupiamo del caso in cui la S sia ad area minima, avvertendo che del tutto analoga sarebbe la verifica per una superficie parallela. A causa del carattere invariantivo delle equazioni fondamentali (A), (B), potremo riferire la superficie data S ad un sistema conveniente di coordinate curvilinee e noi, per semplificare i calcoli, adopereremo le linee di curvatura u, v. Colle notazioni del § 1, avendosi qui

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1},$$

significando $r_1 r_2$ i raggi principali di curvatura della S (che nel caso del presente paragrafo sono eguali e di segno contrario), le formole (1) si scriveranno:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,X_1,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,X_2\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2-\frac{\sqrt{E}}{r_2}X_3,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1,\quad \frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1-\frac{\sqrt{G}}{r_1}X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}X_1,\quad \frac{\partial X_3}{\partial v}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}X_2.
\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

Essendo la superficie attuale S ad area minima, dovremo porre nella (29)

$$\gamma=-1,\quad \alpha=0,$$

e rimarrà β arbitraria.

Le equazioni fondamentali (A) § 11 diventano quindi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\frac{\beta\sqrt{E}}{r_2}\Phi+\left(\beta+\frac{1}{r_2}\right)\sqrt{E}\,W\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{\beta\sqrt{G}}{r_1}\Phi+\left(\beta+\frac{1}{r_1}\right)\sqrt{G}\,W,
\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

dove, per comodità dei calcoli seguenti, abbiamo scritto due volte sotto forme diverse l'equazione media. Le equazioni del sistema (B) § 11, diventano poi semplicemente

$$\frac{\partial W}{\partial u}=-\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad \frac{\partial W}{\partial v}=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\qquad(36)$$

ed in fine la (C) § 11 ci dà:

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2=2\,\beta\,\Phi\,W-W^2+c.\qquad(37)$$

Le formole (33) che definiscono la superficie inviluppo Σ si scrivono qui:

$$\xi = x - \frac{1}{\beta W}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot X_2\right\} + \frac{W - \beta \Phi}{\beta W} X_3 \qquad (38)$$

e la derivazione rapporto ad u, v ci dà per le (34), (35), (36):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= \frac{1}{\beta W^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{1}{r_2} X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{1}{r_2} X_2 + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left[(W - \beta \Phi)\frac{1}{r_2} - \beta W\right] X_3\right\}\\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{1}{\beta W^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{1}{r_1} X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{1}{r_1} X_2 + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left[(W - \beta \Phi)\frac{1}{r_1} - \beta W\right] X_3\right\},
\end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

da cui osservando la (37) e la relazione $r_1 + r_2 = 0$, otteniamo per l'elemento lineare di Σ

$$d s^2 = d \xi^2 + d \eta^2 + d \zeta^2,$$

la formula seguente:

$$\begin{aligned}
\beta^2 W^4 d s^2 = &\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 \left\{\beta^2 W^2 + 2 \beta W (\beta \Phi - W)\frac{1}{r_2} + (c + \beta^2 \Phi^2)\frac{1}{r_2^2}\right\} d u^2 + \\
&+ 2 \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left\{\beta^2 W^2 + (c + \beta^2 \Phi^2)\frac{1}{r_1 r_2}\right\} d u\, d v + \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \left\{\beta^2 W^2 + 2 \beta W (\beta \Phi - W)\frac{1}{r_1} + (c + \beta^2 \Phi^2)\frac{1}{r_1^2}\right\} d v^2.
\end{aligned}$$

Ora, per le (36), si ha:

$$d W = -\frac{1}{r_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u} d u - \frac{1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial v} d v,$$

indi

$$d \Phi\, d W = -\left\{\frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 d u^2 + \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 d v^2\right\}$$

$$d W^2 = \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 d u^2 + \frac{2}{r_1 r_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} d u\, d v + \frac{1}{r_1^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 d v^2$$

e la precedente si scrive quindi:

$$d s^2 = \frac{\beta^2 W^2 d \Phi^2 + 2 \beta W (W - \beta \Phi) d \Phi\, d W + (c + \beta^2 \Phi^2) d W^2}{\beta^2 W^4}. \qquad (40)$$

In questa forma dell'elemento lineare di Σ è sparita ogni traccia della superficie minima S inizialmente scelta, onde si conclude già che, mantenendo fisse le costanti c, β e variando comunque le superficie minime S, le superficie Σ derivate saranno tutte applicabili l'una sull'altra.

§ 15.

Riduzione dell'elemento lineare (40) alla forma (I) di Weingarten.

Vogliamo ora ridurre effettivamente l'elemento lineare trovato (40) alla forma tipica (I) di Weingarten, ciò che in pari tempo ci fornirà delle formole di confronto per le rimanenti verifiche.

Lasciandoci guidare dalla ipotesi che la relazione geometrica fra S e Σ sia veramente quella richiesta, dovremo cominciare dall'assumere sopra Σ a linee coordinate v quelle le cui tangenti sono parallele alle rispettive normali di S, indi a linee u le traiettorie ortogonali. Ora è facile vedere che le linee del primo sistema sulla Σ non sono altro che le $W=$ cost. E infatti spostandosi lungo una tale linea gli incrementi di ξ, η, ζ debbono essere proporzionali a X_3, Y_3, Z_3 rispettivamente, ciò che, avendo riguardo alle (39), dà subito per l'equazione differenziale delle linee cercate

$$\frac{1}{r_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\, d u+\frac{1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\, d v=0$$

ossia, per le (36): $d\, W=0$.

D'altra parte, a causa della forma (40) dell'elemento lineare di Σ, l'equazione differenziale delle loro traiettorie ortogonali si scrive:

$$\beta\, W d\, \Phi+(W-\beta\, \Phi)\, d\, W=0,$$

ossia

$$\beta\, d\left(\frac{\Phi}{W}\right)+\frac{d\, W}{W}=0.$$

Conformemente a queste osservazioni, pongasi ora

$$\beta\, \frac{\Phi}{W}+\log W=u+\frac{1}{2},$$

ossia

$$\beta \Phi = W\left(u - \log W + \frac{1}{2}\right),$$

e la (40) diventerà

$$d s^2 = \frac{W^4 d u^2 + [c + 2 W^2 (u - \log W)] d W^2}{\beta^2 W^4}.$$

Questa, ponendo fine $W = e^v$, ci dà:

$$d s^2 = \frac{1}{\beta^2} \{ d u^2 + [2 u - 2 v + c e^{-2v}] d v^2 \},$$

che, prescindendo dal fattore costante $\frac{1}{\beta^2}$, ha appunto la forma (I).

Per completare poi tutte le verifiche bastano ora le osservazioni seguenti.

Sia μ un punto qualunque di S, M il corrispondente di Σ e P il piede della perpendicolare calata da M sulla normale in μ alla S. La retta $M P$ riesce, per la costruzione stessa, tangente alla linea $u =$ cost. di Σ, e se poniamo poi

$$M P = \Lambda, \quad P \mu = T,$$

dalle (38) abbiamo subito

$$T = \frac{W - \beta \Phi}{\beta W}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{2 \beta \Phi W - W^2 + c}}{\beta W},$$

ovvero per le posizioni fatte

$$T = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2} + v - u\right), \quad \Lambda = \frac{1}{\beta} \sqrt{2 u - 2 v + c e^{-2v}},$$

formole che confrontate colle (16) § 3 completano appunto le verifiche domandate.

§ 16.

La superficie Σ inviluppo nel caso in cui S è a curvatura costante.

Supponiamo ora che la S sia a curvatura costante K e (Φ, W) sia una soluzione qualsiasi delle equazioni fondamentali (A), (B) § 11, ove attualmente nella (29) dovremo fare:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -(\gamma + 1) K.$$

Riferiamo inoltre la S alle sue linee di curvatura u, v; varranno allora le formule (34) § 14 ed il sistema (A) § 11 diventerà:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - (\gamma+1) K \sqrt{E}\,\Phi - \frac{\gamma}{r_2}\sqrt{E}\,W \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u} \\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - (\gamma+1) K \sqrt{G}\,\Phi - \frac{\gamma}{r_1}\sqrt{G}\,W,
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

mentre le (B), (C) § 11 si cangiano nelle seguenti:

$$\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{1}{r_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = -\frac{1}{r_1}\frac{\partial \Phi}{\partial v} \quad (42)$$

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 = \gamma W^2 - (\gamma+1) K \Phi^2 + c. \quad (43)$$

Secondo le formole (33) § 13, per l'attuale superficie inviluppo Σ avremo:

$$\xi = x + \frac{1}{(\gamma+1) K \Phi}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u} X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2\right\} + \frac{\gamma W}{(\gamma+1) K \Phi} X_3. \quad (44)$$

Di qui derivando, coll'osservare le (34) § 14 e le superiori (41), (42), otte-

niamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\frac{1}{(\gamma+1)K\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}X_2 + \right.\\ &\qquad \left. + \left[(\gamma+1)\frac{\Phi}{r_2} + \gamma W\right]X_3\right\}\\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -\frac{1}{(\gamma+1)K\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}X_2 + \right.\\ &\qquad \left. + \left[(\gamma+1)\frac{\Phi}{r_1} + \gamma W\right]X_3\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (44^*)$$

Conseguentemente, tenendo conto della (43) e della relazione $\frac{1}{r_1 r_2} = K$, per il quadrato $d s^2$ dell'elemento lineare di Σ troviamo la formola:

$$\begin{aligned}(\gamma+1)^2 K^2 \Phi^4 . d s^2 = &\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 \left\{\gamma(\gamma+1)W^2 - (\gamma+1)K\Phi^2 + c + \right.\\ &\left. + 2\gamma(\gamma+1)\frac{\Phi W}{r_2} + (\gamma+1)^2\frac{\Phi^2}{r_2^2}\right\} d u^2 + \\ &+ 2\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left\{\gamma(\gamma+1)W^2 - (\gamma+1)K\Phi^2 + c + \right.\\ &\left. + \gamma(\gamma+1)\Phi W\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + (\gamma+1)^2 K\Phi^2\right\} d u\, d v + \\ &+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \left\{\gamma(\gamma+1)W^2 - (\gamma+1)K\Phi^2 + c + \right.\\ &\left. + 2\gamma(\gamma+1)\frac{\Phi W}{r_1} + (\gamma+1)^2\frac{\Phi^2}{r_1^2}\right\} d v^2.\end{aligned}$$

Ma dalle (42) si deduce:

$$d\Phi\, d W = -\frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 d u^2 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} d u\, d v - \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 d v^2 \quad (45)$$

$$d W^2 = \frac{1}{r_2^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 d u^2 + 2K\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} d u\, d v + \frac{1}{r_1^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 d v^2, \quad (45^*)$$

onde la precedente ci dà per l'elemento lineare di Σ la forma

$$ds^2 = \frac{[\gamma(\gamma+1)W^2 - (\gamma+1)K\Phi^2 + c]d\Phi^2 - 2\gamma(\gamma+1)\Phi W d\Phi d W + (\gamma+1)^2\Phi^2 d W^2}{(\gamma+1)^2 K^2 \Phi^4} \quad (46)$$

la quale, analogamente a quanto avveniva nel caso precedente (§ 14), è indipendente dalla speciale superficie S, a curvatura costante K, considerata e non muta quando si tengano fisse le costanti γ e c.

§ 17.

Riduzione alla forma tipica (II).

Volendo verificare che l'elemento lineare (46) si riduce alla forma (II) dobbiamo, come al § 15, prendere a linee coordinate v sulla Σ quelle che hanno le tangenti parallele alle rispettive normali di S, indi a linee u le loro traiettorie ortogonali. Ma coll'osservazione stessa fatta al § 15 segue ora dalle (44*) che le prime linee non sono altro che le $\Phi = \text{cost.}$; le loro traiettorie ortogonali hanno l'equazione differenziale

$$\gamma W d\Phi - (\gamma + 1)\Phi d W = 0,$$

la cui integrazione è immediata.

Dopo queste osservazioni, per compiere la voluta riduzione poniamo:

$$\Phi = e^v, \quad W = e^{\frac{\gamma}{\gamma+1}(v-u+\alpha)},$$

determinando la costante α dalla condizione

$$e^{\frac{\gamma}{\gamma+1}\alpha} = \left|\frac{(\gamma+1)K}{\gamma}\right|$$

e l'elemento lineare (46) si trasformerà nell'altro:

$$d s^2 = e^{-2\frac{\gamma u+v}{\gamma+1}} d u^2 + \left\{ \frac{c}{(\gamma+1)^2 K^2} e^{-2v} - \frac{1}{(\gamma+1)K} + \frac{1}{\gamma} e^{-2\frac{\gamma u+v}{\gamma+1}} \right\} d v^2,$$

che sotto altre notazioni ha appunto la forma (II). Per identificare i due elementi lineari basta in effetto porre:

$$a = -\frac{1}{\gamma+1}, \quad A = \frac{1}{K}, \quad k = \frac{c}{(\gamma+1)^2 K^2}.$$

Completeremo le nostre verifiche osservando che colle notazioni stesse del § 15 si trova qui dalle (44)

$$\Lambda = \frac{\sqrt{\gamma W^2 - (\gamma + 1) K \Phi^2 + c}}{(\gamma + 1) K \Phi} = \sqrt{G}$$

$$T = \frac{\gamma}{(\gamma + 1) K} \frac{W}{\Phi} = e^{av-(a+1)u} = \sqrt{E}\,.$$

Chiudiamo queste ricerche sulle superficie Σ d'elemento lineare (I) e (II), considerate come derivate rispettivamente dalle superficie d'area minima e da quelle a curvatura costante, colle osservazioni seguenti.

Il sistema delle equazioni fondamentali (A), (B) § 11 essendo lineare ed omogeneo, la sua soluzione più generale (Φ, W) si comporrà linearmente ed omogeneamente con ogni quaderna di soluzioni particolari.

$$(\Phi_1, W_1), \quad (\Phi_2, W_2), \quad (\Phi_3, W_3), \quad (\Phi_4, W_4),$$

per le quali sia diverso da zero il determinante:

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_4}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Ora è facile accertarsi che possono sempre scegliersi quattro tali soluzioni fra quelle per le quali è nulla nella (C) § 11 la costante c, onde concludiamo:

Se di una superficie S ad area minima, ovvero a curvatura costante, si conoscono quattro particolari superficie Σ applicabili sopra superficie di rotazione, corrispondenti ad un medesimo sistema (A) (B) *di equazioni differenziali fondamentali, le più generali superficie Σ derivate si avranno senz'altro in termini finiti.*

§ 18.

Le superficie Σ d'elemento lineare (III)

Supponiamo ora che la superficie S sia a curvatura costante K e, riferendola alle sue linee di curvatura u, v, prendiamo per Φ una soluzione del sistema (D) § 12, che nelle attuali coordinate u, v diventa:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}-K\sqrt{E}\,\Phi-\frac{n\sqrt{E}}{r_2}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}-K\sqrt{G}\,\Phi-\frac{n\sqrt{G}}{r_1}.
\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

Determinando poi W dalle (B) § 11, cioè dalle

$$\frac{\partial W}{\partial u}=-\frac{1}{r_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad \frac{\partial W}{\partial v}=-\frac{1}{r_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\tag{48}$$

avremo, per la (E) § 12:

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{G}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2=2\,n\,W-K\Phi^2+c.\tag{49}$$

Consideriamo ora la superficie Σ inviluppo dei piani normali alle linee $\Phi=$ cost. sopra S; le coordinate ξ, η, ζ di un suo punto mobile saranno date, secondo le (33*) § 13 da

$$\xi=x+\frac{1}{K\Phi}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}X_1+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Phi}{\partial v}X_2+n\,X_3\right\}\tag{50}$$

colle formole analoghe per η, ζ.

Derivando ed osservando le (47) e le (34) § 14 otteniamo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial u} &= -\frac{1}{K\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}X_2 + \left(n + \frac{\Phi}{r_2}\right)X_3\right\}\\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -\frac{1}{K\Phi^2}\frac{\partial \Phi}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Phi}{\partial u}X_1 + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Phi}{\partial v}X_2 + \left(n + \frac{\Phi}{r_1}\right)X_3\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (50^*)$$

Calcolando di qui l'elemento lineare di Σ

$$d s^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

coll'osservare la (49) e le (45), (45*) § 16, otteniamo:

$$d s^2 = \frac{(2nW - K\Phi^2 + c + n^2)\, d\Phi^2 - 2n\Phi\, d\Phi\, dW + \Phi^2\, dW^2}{K^2\Phi^4}. \qquad (51)$$

Considerando dapprima il caso particolare in cui $n = 0$, questo elemento lineare

$$d s^2 = \frac{(c - K\Phi^2)\, d\Phi^2 + \Phi^2\, dW^2}{K^2\Phi^4} \qquad (51^*)$$

appartiene ad una superficie di rotazione, e precisamente alle complementari delle superficie a curvatura costante (*). Per vedere la cosa con maggiore chiarezza osserviamo che per $n = 0$ il sistema (D) § 12 si riduce ad un ben noto sistema considerato da WEINGARTEN (cf. *Lezioni*, pag. 525) e le linee $\Phi =$ cost. sopra S sono un sistema di circoli paralleli. Dunque in tal caso la superficie Σ inviluppo dei piani normali delle linee Φ non è altro appunto che la complementare di S rispetto alle geodetiche ortogonali.

(*) Anche in questo caso si può assegnare una quadrica di DARBOUX coll'elemento lineare del testo. Se si pone infatti:

$$x = \frac{W}{K\Phi}, \quad y + iz = \frac{1}{K\Phi}, \quad y - iz = \frac{C + K\Phi^2 - W^2}{K\Phi},$$

il $ds^2 = dx^2 + (dy + i\,dz)(dy - i\,dz)$ assume appunto la forma (51*) del testo. Eliminando W, Φ dalle precedenti, si ha l'equazione della quadrica in discorso:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c(y + iz)^2 - \frac{1}{K} = 0.$$

Se $c = 0$ (ciò che vincola K ad avere un valore negativo se si vuole un ds^2 reale) abbiamo una sfera immaginaria. Quando $c \neq 0$ la quadrica *iperoscula* in un punto il circolo immaginario poichè l'equazione in λ, costruita come al § 9, diventa $(\lambda + 1)^4 = 0$.

Supponiamo ora $n \neq 0$ e dimostriamo che l'elemento lineare (51) è riducibile allora alla forma tipica (III), indipendente da c e da n (*). Procedendo perciò come al § 17 osserviamo che le linee di Σ le cui tangenti riescono parallele alle normali di S sono ancora qui le linee $\Phi = \text{cost.}$, a causa delle (50*), mentre le loro traiettorie ortogonali hanno l'equazione differenziale

$$n\, d\,\Phi = \Phi\, d W.$$

Dopo ciò pongasi

$$\Phi = e^{v+\alpha}, \quad W = n\,(v-u) - \frac{c}{n},$$

determinando la costante α da

$$e^{\alpha} = \frac{n}{K};$$

l'elemento lineare (51) diventerà

$$d\,s^2 = e^{-2v}\, d\,u^2 + \left\{ 2\,(v-u)\, e^{-2v} - \frac{1}{K} \right\} d\,v^2,$$

che ha precisamente la forma tipica (III) con $A = \frac{1}{K}$.

In fine che la superficie Σ inviluppo d'elemento lineare (III) stia colla S uella relazione richiesta si vede come ai paragrafi precedenti osservando che i valori di Λ, T sono $\Lambda = \sqrt{G}$, $T = \sqrt{E}$.

§ 19.

Sulla integrazione del sistema (D).

Si è già sopra osservato che il sistema (D), da cui dipende la ricerca delle superficie Σ d'elemento lineare (III) derivate da una data superficie S a curvatura costante K, si riduce per $n = 0$ al sistema considerato da Weingarten:

$$\psi_{11} = -K E \psi, \quad \psi_{12} = -K F \psi, \quad \psi_{22} = -K G \psi, \qquad \text{(D*)}$$

(*) Direttamente si vede quest' ultima cosa osservando che quando $n \neq 0$, mutando W in $W +$ cost. si può fare $c = -n$; indi cangiando Φ, W in $n\,\Phi$, $n\,W$ si rende $n = 1$.

per la cui integrazione completa basta, come è noto, la conoscenza delle linee geodetiche di S (*Lezioni*, l. c.). Supponiamo appunto note le geodetiche sopra S ed integrato quindi il sistema (D*) di WEINGARTEN; il metodo della variazione delle costanti arbitrarie permetterà di dedurne con quadrature la soluzione più generale del sistema (D) per $n \neq 0$. Questo risultato, che discende dalle proprietà generali dei sistemi lineari, stabiliamo qui direttamente come segue.

Siano ψ_1, ψ_2, ψ_3, tre soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo (D*) di WEINGARTEN e quindi tali che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

non sia nullo. Dalla derivazione di Δ, avendo riguardo alle (D*), si trae

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u} = \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \Delta$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial v} = \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \Delta$$

e quindi per note formule (*Lezioni*, pag. 91)

$$\Delta = k \sqrt{E G - f^2}, \tag{52}$$

indicando k una costante (*).

Applicando il metodo della variazione delle costanti, poniamo la soluzione generale Φ del sistema (D) sotto la forma

$$\Phi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3,$$

cercando di determinare C_1, C_2, C_3 in funzione di u, v dalle equazioni:

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} \psi_1 + \frac{\partial C_2}{\partial u} \psi_2 + \frac{\partial C_3}{\partial u} \psi_3 = 0$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial C_2}{\partial u} \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + \frac{\partial C_3}{\partial u} \frac{\partial \psi_3}{\partial u} = n D$$

(*) Alterando una delle tre soluzioni per un fattore si potrà dare a k un valore prefissato qualsiasi.

$$\frac{\partial C_1}{\partial u}\frac{\partial \psi_1}{\partial v}+\frac{\partial C_2}{\partial u}\frac{\partial \psi_2}{\partial v}+\frac{\partial C_3}{\partial u}\frac{\partial \psi_3}{\partial v}=n\,D'$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v}\psi_1+\frac{\partial C_2}{\partial v}\psi_2+\frac{\partial C_3}{\partial v}\psi_3=0$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v}\frac{\partial \psi_1}{\partial u}+\frac{\partial C_2}{\partial v}\frac{\partial \psi_2}{\partial u}+\frac{\partial C_3}{\partial v}\frac{\partial \psi_3}{\partial u}=n\,D'$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v}\frac{\partial \psi_1}{\partial v}+\frac{\partial C_2}{\partial v}\frac{\partial \psi_2}{\partial v}+\frac{\partial C_3}{\partial v}\frac{\partial \psi_3}{\partial v}=n\,D'',$$

dopo di che appunto la Φ verrà a soddisfare al sistema (D). Ora dalle precedenti, osservando la (52), si traggono per le due derivate di C_1 i valori:

$$\frac{\partial C_1}{\partial u}=\frac{n}{k\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} 0 & \psi_2 & \psi_3 \\ D & \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ D' & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix},\quad \frac{\partial C_1}{\partial v}=\frac{n}{k\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} 0 & \psi_2 & \psi_3 \\ D' & \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \\ D'' & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (53)$$

e analogamente per C_2, C_3 con rotazione degli indici 1, 2, 3. D'altronde la condizione d'integrabilità delle (53) risulta identicamente soddisfatta in virtù delle equazioni (D*) cui soddisfano ψ_2, ψ_3 e delle equazioni di Codazzi scritte sotto la forma (IV*) pag. 91 delle *Lezioni* e si avrà così con una quadratura C_1, alla quale è da aggiungere una costante assoluta arbitraria c_1; analogamente dicasi per C_2, C_3.

Per tal modo abbiamo stabilito il teorema:

Da una superficie S a curvatura costante K, sulla quale siano note le linee geodetiche, si ottengono con tre quadrature ∞^3 superficie Σ derivate di elemento lineare (III):

$$d\,s^2=e^{-2v}\,d\,u^2+\left\{2(v-u)\,e^{-2v}-\frac{1}{K}\right\}d\,v^2. \qquad \text{(III)}$$

Come esempio prendiamo per superficie S la pseudosfera di raggio $=1$ ($K=-1$), riferita alle sue linee di curvatura u, v colle formole

$$x=\frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u},\quad y=\frac{\cos v}{\cosh u},\quad z=u-\operatorname{tgh} u.$$

L'elemento lineare essendo

$$d\,s^2=\operatorname{tgh}^2 u\,d\,u^2+\frac{d\,v^2}{\cosh^2 u},$$

per le tre soluzioni particolari ψ_1, ψ_2, ψ_3 del sistema (D*) possiamo prendere qui

$$\psi_1 = \frac{1}{\cosh u}, \quad \psi_2 = \frac{v}{\cosh u}, \quad \psi_3 = \frac{v^2}{\cosh u} + \cosh u.$$

Eseguendo le indicate quadrature, osservando che è qui $n = 2$, troviamo per la soluzione più generale Φ del sistema (D):

$$\Phi = \frac{u}{\cosh u} - \operatorname{senh} u + c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3$$

e dalle (50) calcoleremo la corrispondente superficie Σ. Così, facendo $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = 1$ troveremo:

$$\xi = \frac{\cosh u \cos v}{u + v - \operatorname{senh} u \cosh u}, \quad \eta = \frac{\cosh u \operatorname{sen} v}{u + v - \operatorname{senh} u \cosh u},$$

$$\zeta = u + \frac{2 \cosh^2 u}{u + v - \operatorname{senh} u \cosh u}.$$

§ 20.

Interpretazione geometrica del sistema (D).

Il sistema di equazioni simultanee (D) è suscettibile di una notevole interpretazione geometrica, che viene a collegare le superficie Σ d'elemento lineare (III) con quei sistemi tripli ortogonali più generali, contenenti una famiglia (S) di superficie a curvatura costante, la cui teoria è svolta nel Capitolo XX delle mie *Lezioni*.

Supponiamo di avere un tale sistema triplo ortogonale, ove ciascuna superficie S della famiglia (S), individualmente considerata, ha costante la curvatura K, ma il valore di K varia (con continuità) variando la superficie S nella famiglia. Il segmento infinitesimo di normale alla S intercetto dalla superficie successiva è proporzionale ad una funzione Φ che soddisfa al sistema (D), poichè a queste riduconsi appunto le equazioni di Lamè nel caso attuale (*Lezioni*, l. c.). Ora la superficie Σ d'elemento lineare (III) era l'inviluppo dei piani normali alle linee $\Phi =$ cost. sopra S, cioè alle *linee di equidistanza*. D'altronde i piani normali di queste linee coincidono, per un noto

teorema (*Lezioni*, pag. 465), coi piani osculatori nei punti di S delle curve traiettorie ortogonali della famiglia S. Siamo dunque pervenuti alla seguente singolare proprietà dei sistemi tripli ortogonali in discorso:

In qualunque sistema triplo ortogonale, contenente una famiglia (S) *di superficie a curvatura costante, i piani osculatori nei punti di una superficie S a curvatura costante K delle curve traiettorie ortogonali della famiglia* (S) *inviluppano una superficie Σ d'elemento lineare*

$$d s^2 = e^{-2v} d u^2 + \left\{ 2 (v - u) e^{-2v} - \frac{1}{K} \right\} d v^2, \tag{III}$$

dipendente unicamente dal valore di K.

Così la classe *completa* delle superficie Σ con questo elemento lineare, ovvero delle superficie applicabili sulla quadrica di Darboux (§ 9)

$$x^2 + 2 z^2 - 2 x y - 2 i x z - 2 i y z - \frac{1}{K} = 0,$$

osculante in un punto il circolo immaginario all'infinito, viene a dedursi, con una costruzione geometrica, dai sistemi tripli ortogonali contenenti una famiglia di superficie ciascuna delle quali è a curvatura costante.

Viareggio, Settembre 1900.

L'Ingegnere Cavaliere **Cristiano Rebeschini,** colpito da improvviso malore, si spense il 17 maggio 1901. Dapprima collaboratore dei Bernardoni, poi loro successore quale proprietario della rinomata Ditta tipografica e quale editore degli *Annali di Matematica,* egli continuò a dedicare le cure più assidue e disinteressate a questo Periodico che gli era sempre stato carissimo, e del quale per tanti anni erasi occupato con zelo ed amore.

Al compianto generale per la repentina scomparsa del **Rebeschini**, si unisce il nostro vivissimo; e tale rimpianto non nasce in noi soltanto dalla convinzione di avere in lui perduto un laborioso e intelligente collaboratore degli *Annali,* ma anche e più da memore affetto per l'amico, che una lunga dimestichezza ci aveva insegnato ad apprezzare, e per l'uomo buono, integerrimo, che aveva saputo cattivarsi e meritarsi la stima universale.

La Direzione.

Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.

(*Di* G. Castelnuovo, *a Roma* e F. Enriques, *a Bologna.*)

In questa Memoria ci siamo proposti di esporre i resultati di alcune ricerche che abbiamo ultimamente compiute intorno alla teoria delle superficie algebriche. Ma poichè i nuovi resultati a cui siamo pervenuti si appoggiano sopra quelli precedentemente raggiunti, dai quali è occorso rimuovere qua e là inutili limitazioni, ci trovammo costretti ad allargare il primitivo proposito esponendo al lettore un quadro di tutti o quasi tutti i più essenziali resultati che abbiamo ottenuto in questa teoria, da sette anni fino ad oggi.

Naturalmente abbiamo riferito i teoremi colle spiegazioni necessarie, lasciando però da parte quelle dimostrazioni che era affatto inutile di riprodurre.

Il metodo di esposizione da noi tenuto speriamo possa contribuire alla chiarezza della lettura, giacchè esso rende, a nostro parere, accessibile il lavoro anche a chi non abbia alcuna conoscenza speciale dell'argomento.

Crediamo utili tuttavia poche parole d'introduzione per spiegare a quale scopo sieno dirette le nostre ultime ricerche, ed a quali nuovi resultati esse ci abbiano condotto.

Nello studio dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie è fondamentale la nozione del *sistema aggiunto* ad un sistema lineare dato (§ I).

Partendo da un sistema $|C|$ e costruendo il suo aggiunto $|C'|$, l'aggiunto di questo (2° aggiunto) $|C''|$, e così continuando, si ottiene una serie generalmente illimitata di sistemi lineari

$$|C|,\quad |C'|,\quad |C''|,\ldots,\quad |C^{(i)}|,\ldots;$$

e dalla considerazione di questa scaturiscono i *caratteri* e i *sistemi di curve invarianti* per la superficie (§ II).

In casi particolari la serie sopra nominata si arresta ad un ultimo sistema aggiunto $|C^{(i)}|$; si ha allora un processo di riduzione che si è già rivelato utile nello studio delle superficie razionali (involuzioni piane, e condizioni di razionalità).

Determinare tutte le superficie sopra cui il procedimento di aggiunzione si estingue, è la questione fondamentale che ci siamo proposti.

La risposta a tale questione è che *tutte le superficie dotate di questa proprietà sono riferibili a rigate (razionali o no).*

Da questa risposta, che comprende come casi particolari i vari resultati già ottenuti col metodo di riduzione sopra nominato, seguono due ordini di nuove conseguenze:

1) Conseguenze relative alle *condizioni di trasformabilità* di una superficie *in una rigata* (§§ V e VI), dalle quali si deducono in particolare le note *condizioni di razionalità* (§ VI, n.° 23);

2) Conseguenze relative alla teoria generale delle superficie, segnatamente la possibilità di eliminare le curve eccezionali per ogni superficie che non appartenga alla famiglia delle rigate, e gli sviluppi che si riattaccano alla nozione del *genere lineare* (§ V, n.° 18 e § VI).

In luogo di un più ampio resoconto di tali resultati porgiamo al lettore un indice particolareggiato della Memoria, richiamando specialmente la sua attenzione sopra le questioni risolute nel § V, le quali fanno fede (se non c'inganniamo) dei progressi portati da queste nuove ricerche nella teoria delle superficie algebriche.

INDICE

18. Superficie con infinite curve eccezionali.
19. Superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali in sè stesse non formante un gruppo d'ordine finito.

VI. *Il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie, e la sua importanza nel decidere se la superficie sia trasformabile in una rigata.*

20. Il genere lineare $p^{(1)}$ per le superficie con un numero finito di curve eccezionali.
21. Definizione generale del genere lineare; condizione di trasformabilità di una superficie in una rigata.
22. Il genere lineare secondario.
23. Condizioni di razionalità di una superficie.
24. Questioni insolute.

I. Prime proprietà dei sistemi lineari di curve sopra una superficie.

1. Le considerazioni che seguono si riferiscono alla geometria sopra una superficie algebrica F, che supponiamo appartenere ad un certo spazio S_r a $r \geqq 3$ dimensioni, ed essere *priva di punti multipli.*

Questa ipotesi non porta invero alcuna restrizione al nostro studio, giacchè ogni superficie data, con singolarità qualunque, può essere birazionalmente trasformata in un'altra, appartenente ad un S_r con $r \geqq 5$, priva di singolarità (*).

Sopra F considereremo *sistemi lineari* $|C|$ *di curve* (algebriche) C, ai quali generalmente non verranno *imposti* dei *punti base*; ed ogni sistema $|C|$ verrà considerato nella maggiore ampiezza possibile, cioè *completo* (o *normale*), per modo che non esista alcun sistema lineare di curve *dello stesso ordine* contenente $|C|$. Qui importa ricordare che una qualunque curva (*totale*) C *determina il sistema completo cui appartiene* (**). Assegnando dunque, sopra F, un sistema lineare $|C|$, supporremo, ove la scelta sia arbitraria, che le curve C sieno *irriducibili*, ∞^1 almeno, e non passino per alcun punto fisso *(punto base).*

Noi in seguito dedurremo dai sistemi lineari irriducibili e privi di punti base, scelti su F, nuovi sistemi lineari, mediante certe operazioni; ma queste saranno di tal natura che i nuovi sistemi costruiti non dovranno mai avere, *a priori*, dei punti base, per effetto delle operazioni stesse. Riservandoci di fissare, fra un momento, le operazioni di cui si tratta, avvertiamo subito che colle condizioni enunciate *non* si esclude:

1) che i sistemi costruiti, ∞^1 almeno, pur essendo composti di curve irriducibili, abbiano dei *punti base accidentali*, i quali però si debbono ri-

---

(*) Allo studio di una siffatta trasformazione sono rivolti i noti lavori dei Sigg. Noether, Del Pezzo, Segre, Picard, B. Levi. E, sebbene il procedimento seguito da questi geometri vada soggetto talvolta a qualche limitazione, o, per alcuni, non appaia affatto immune da critiche, così da porgere una dimostrazione luminosa del resultato, valida per tutti i casi di singolarità complicate, noi ci teniamo egualmente sicuri della esattezza della conclusione, alla quale si può giungere per molteplici vie. Ad una di queste vie accenniamo nell'articolo sulle *Superficie algebriche* scritto per la *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.*

(**) Cfr. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra una superficie algebrica.* Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), (serie III), tom. X, 1896, §§ 9, 11.

guardare come *virtualmente non esistenti*, nel senso che verrà precisato più tardi;

2) che i sistemi costruiti come si è detto, ∞^1 almeno, riescano composti di curve *riducibili*, la quale ipotesi dà luogo a due casi (*):

a) che le curve del sistema si compongano di un certo numero di *componenti fisse*, e di *componenti variabili irriducibili* (costituenti un sistema lineare irriducibile virtualmente privo di punti base su F);

b) che le curve del sistema, all'infuori di *eventuali componenti fisse*, sieno composte ciascuna di più *curve variabili di un fascio*, lineare o no (sistema ∞^1 di curve tale che un punto di F appartenga ad *una* curva del sistema), il fascio essendo ancora virtualmente privo di punti base;

3) che i sistemi indicati sieno ∞^0, cioè constino di *una sola curva* (irriducibile o no).

La convenzione di riguardare come *virtualmente non esistente* un punto base accidentale A di un sistema lineare $|C|$ costruito su F, si traduce nella seguente:

Se la superficie F viene trasformata in un'altra superficie F^*, per modo che al punto A di F corrisponda su F^* una curva a^* *(curva eccezionale), la curva a^* si deve riguardare come facente parte di tutte le curve trasformate delle C.*

Questa convenzione porta di conseguenza altre convenzioni relative al modo di valutare i caratteri di $|C|$, le quali verranno esposte tra poco.

Cominciamo a stabilire la natura delle operazioni che intendiamo eseguire sui sistemi lineari dati su F.

Anzitutto *opereremo per somma e per sottrazione.*

Dati due sistemi lineari (completi) $|C|$ e $|K|$, dicesi *sistema somma* di essi, e designasi con $|C+K|$, il sistema lineare completo contenente tutte le curve composte di una C e di una K; questo sistema è irriducibile se sono irriducibili $|C|$ e $|K|$, a meno che questi non coincidano in un unico fascio; esso è privo di punti base, tali essendo $|C|$ e $|K|$.

Dati due sistemi lineari $|C|$ e $|K|$, e *supposto che $|C|$ contenga parzialmente* $|K|$ (vale a dire che una e quindi ogni curva K formi parte di una o più curve C), dicesi *sistema differenza* $|C-K|$ (o *residuo di* $|K|$ *rispetto* a $|C|$) il sistema completo costituito dalle curve che insieme ad una K compongono una C; questo sistema $|X|$ riesce *indipendente dalla*

(*) Cfr. Enriques, l. c., § 5.

curva K considerata (*), e può definirsi mediante l'equazione simbolica

$$|K+X|=|C|.$$

Nella sottrazione possono ottenersi sistemi riducibili, comunque si operi su sistemi irriducibili; inoltre, pur essendo $|C|$ privo di punti base, $|C-K|$ può avere dei punti base accidentali, che in ogni caso debbono riguardarsi come virtualmente non esistenti.

Ad ogni sistema lineare $|C|$ competono tre caratteri fondamentali: la *dimensione,* il *genere*, il *grado*, invariabili per una trasformazione birazionale della superficie.

Relativamente al genere e al grado occorrono le seguenti spiegazioni:

1) Il genere d'un sistema lineare $|C|$, irriducibile e privo di punti base, è il genere π di una curva C generica. Se $|C|$, ancora irriducibile, possiede dei punti base di molteplicità $j_1, j_2 \ldots$, si debbono distinguere il *genere effettivo* di $|C|$, cioè il genere π di una C generica, ed il suo *genere virtuale* calcolato in armonia colla convenzione di riguardare i punti base di $|C|$ come virtualmente non esistenti; quest'ultimo carattere verrà dato da

$$\pi+\Sigma\frac{j(j-1)}{2}.$$

Se $|C|$ è riducibile, il suo genere (*virtuale*) dovrà essere valutato mediante la formula

$$\pi=\pi_1+\pi_2+i-1,$$

che dà il genere di una curva composta di due componenti aventi rispettivamente i generi π_1, π_2, e secantisi in i punti.

Questa formula, estesa al caso di più componenti, permette di determinare il genere di $|C|$ comunque riducibile; tuttavia se in $|C|$ comparisce una componente fissa γ, contata più volte, occorre considerare il *numero i delle intersezioni di γ con sè stessa* calcolato in base alla nozione sotto esposta di *grado virtuale* d'un sistema lineare.

Se si sommano due sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$, i cui generi valgano rispettivamente π_1, π_2, e dove una C_1 e una C_2 si seghino in i punti, si calcolerà il genere di $|C_1+C_2|$ mediante la formula indicata innanzi

$$\pi=\pi_1+\pi_2+i-1.$$

(*) Enriques, l. c., § 13.

Qui è opportuno ricordare il seguente principio che si appoggia sopra ragioni di continuità e di connessione, e di cui faremo uso frequente:

Se una curva generalmente irriducibile, di genere π, varia in un sistema continuo, e per una posizione particolare si spezza in due componenti distinte, queste hanno almeno un punto comune, fuori dei punti base eventuali del sistema, e quindi ogni componente parziale di quella ha il genere $\leqq \pi$.

2) Il grado d'un sistema lineare irriducibile $|C|$, ∞^1 almeno, privo di punti base su F, è il numero n delle intersezioni di due curve C generiche. Se $|C|$, pur essendo irriducibile, ha dei punti base, conviene distinguere il suo *grado effettivo*, cioè il numero n delle intersezioni *variabili* di due C, ed il suo *grado virtuale* cioè il numero totale delle intersezioni di due C, ove un punto base j^{plo} viene computato per j^2 intersezioni; questo secondo carattere $n + \Sigma j^2$ è quello cui ci riferiremo generalmente, d'accordo colla convenzione di riguardare come virtualmente non esistenti i punti base di $|C|$.

Ma la definizione esposta non ha più senso se $|C|$ è riducibile, contenendo delle parti fisse.

Ecco come si definisce in questo caso il grado (virtuale) di $|C|$.

Osserviamo anzitutto che se $|C_1|$, $|C_2|$ sono due sistemi lineari irriducibili, i cui gradi valgano rispettivamente n_1, n_2, e se si designa con i il numero delle intersezioni di una C_1 con una C_2, il grado di $|C_1 + C_2|$ vale

$$N = n_1 + n_2 + 2\,i.$$

Ora se $|C_1|$ è un sistema lineare riducibile, si può sempre determinare, in infiniti modi, su F un sistema irriducibile $|C_2|$ in guisa che $|C_1 + C_2|$ riesca irriducibile; si dimostra poi che il valore di n_1 tratto dalla formula precedente è indipendente dalla scelta arbitraria di $|C_2|$, e si definisce questo valore come il *grado* (*virtuale*) di $|C_1|$ (*). Questa definizione vale anche se $|C_1|$ è ∞^0; resta così fissato che cosa s'intenda colla locuzione « *numero delle intersezioni di una curva con sè stessa* ». È però da avvertire che questo numero può ben essere negativo, mentre esso è $\geqq 0$ se la curva appartiene ad un fascio.

La definizione del grado virtuale rende sempre valida la formula data innanzi

$$N = n_1 + n_2 + 2\,i,$$

(*) Enriques, l. c., § 15.

la quale esprime in ogni caso il grado del sistema somma di due sistemi dati su F, comunque riducibili.

Termineremo questo paragrafo ricordando due nozioni fondamentali per lo studio delle superficie e dei sistemi lineari sopra di esse:

a) *Curva fondamentale* per un sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, è una curva che non ha alcuna intersezione colle curve C del sistema.

Se al contrario $|C|$ si considera come dotato di punti base *assegnati*, deve riguardarsi come curva fondamentale per esso ogni curva di F che non seghi le C fuori dei punti base del sistema.

b) *Curva eccezionale* è una curva γ di F la quale può essere trasformata in un punto semplice mediante un'opportuna trasformazione birazionale della superficie.

Se si designa con F^* la superficie trasformata di F, e con G^* il punto di F^* che corrisponde alla curva γ di F, avremo che al sistema lineare delle curve C, sezioni, piane o iperpiane di F, corrisponderà sopra F^* un sistema lineare $|C^*|$ avente G^* come punto base. Ed il punto G^* dovrà riguardarsi come un punto base *assegnato* per $|C^*|$, non già come virtualmente inesistente, giacchè altrimenti, ritornando ad F, si sostituirebbe al sistema dato $|C|$ composto delle curve sezioni di F, il sistema composto delle C e della curva fissa γ.

Questa osservazione mostra che mentre si può prescindere affatto dalla considerazione di sistemi dotati di punti base assegnati, finchè si rimane sopra una superficie data F, ciò non è più lecito quando si consideri insieme ad F una sua trasformata F^*, a meno che, nel passaggio da F ad F^*, non si cambi simultaneamente il sistema delle nostre convenzioni.

2. Accanto alle operazioni di addizione e sottrazione applicate ai sistemi lineari dati su F, introdurremo ancora l'operazione (*aggiunzione*) che fa passare da un sistema lineare dato $|C|$, al suo *sistema aggiunto* $|C'|$.

Quando $|C|$ è un sistema irriducibile ∞^r, con $r \geqq 2$, privo di punti base e di curve fondamentali, su F, le curve C' aggiunte a $|C|$ sono definite dalla sola condizione di segare gruppi *canonici*, cioè gruppi delle serie $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, sulla curva C generica supposta di genere π; (viene eccepito soltanto il caso in cui fra le ∞^r C ve ne sieno ∞^{r-1} riducibili). Le curve C' (quando esistono) formano sempre un sistema lineare completo, virtualmente privo di punti base su F, che dicesi *sistema aggiunto a* $|C|$.

Essendo $|C|$ e $|K|$ due sistemi lineari, soddisfacenti alle condizioni dette innanzi, sussiste la *relazione fondamentale* (*)

$$|(C+K)'|=|C+K'|=|C'+K|,$$

dove col simbolo $|(C+K)'|$ si denota il sistema aggiunto a $|C+K|$, ecc.

Questa relazione, estesa a tutti i casi, in cui non figurano punti base, permette di definire in modo determinato il sistema lineare aggiunto ad un qualsiasi sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base, su F, anche quando $|C|$ abbia delle curve fondamentali, o sia riducibile ecc.

L'operazione di aggiunzione applicata a sistemi lineari virtualmente privi di punti base, su F, porta sempre (quando è effettuabile) a sistemi lineari del pari virtualmente privi di punti base.

Accanto al sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ si può considerare l'aggiunto di esso $|C''|$ (2° *aggiunto* a $|C|$) e così via; vale allora anche per gli i-mi aggiunti di due sistemi lineari qualunque $|C|$ e $|K|$, virtualmente privi di punti base su F, la relazione fondamentale

$$|(C+K)^i|=|C+K^i|=|C^i+K|,$$

sotto la sola condizione di esistenza dei sistemi designati dai simboli.

Se un sistema lineare $|C|$ dato sopra F possiede un punto base h-plo, che si consideri non più come virtualmente inesistente, ma come *assegnato*, il sistema aggiunto $|C'|$ verrà definito aggiungendo la condizione che questo punto sia $(h-1)$-plo per le curve C'.

Premesso ciò, si può osservare il carattere invariante della operazione di aggiunzione, e la limitazione a cui tale invarianza è vincolata:

Se F ed F^* sono due superficie senza singolarità, in corrispondenza birazionale, e $|C|$, $|C^*|$ sono due sistemi lineari omologhi sopra di esse, al sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ su F, spogliato delle sue eventuali componenti eccezionali aventi per immagini punti di F^*, corrisponde su F^* il sistema $|C^{*\prime}|$ aggiunto a $|C^*|$ spogliato delle sue eventuali componenti eccezionali aventi per immagini punti di F (**).

Ritornando alla superficie F e ad un sistema $|C|$ privo di punti base sopra quella, è utile notare pel seguito come si riesca ad esprimere il grado n' del sistema aggiunto $|C'|$ in funzione del genere π' di questo e del genere π di $|C|$. Vale precisamente la formola

$$n'=\pi+\pi'-2.$$

(*) Enriques, l. c., cap.[i] III, IV e particolarmente § 27.

(**) Cfr. Enriques, l. c., § 25.

Questa si giustifica formando il sistema $|C+C'|$ che ha il genere $\pi+\pi'+(2\pi-2)-1=3\pi+\pi'-3$, ed ha per sistema aggiunto $|2C'|$; calcolando il numero delle intersezioni di una curva di questo con una curva di quello, si perviene all'uguaglianza

$$2(2\pi-2)+2n'=2(3\pi+\pi'-4),$$

donde segue subito la formola da dimostrare.

II. Caratteri invarianti delle superficie.

3. Alla nostra superficie F appartengono due serie di *caratteri invarianti* per trasformazioni birazionali: *caratteri geometrici* e *caratteri aritmetici.*

I caratteri geometrici che vogliamo considerare sono il *genere* p_g ed i *plurigeneri* $P_i\,(P_1=p_g)$. Essi possono definirsi nel seguente modo:

Consideriamo su F due sistemi lineari $|C|$, $|K|$ ed i successivi aggiunti di essi $|C'|$, $|C''|\ldots$, e rispettivamente $|K'|$, $|K''|\ldots$ Si ha, per la relazione fondamentale,

$$|K+C^i|=|C+K^i|,$$

e quindi sussiste la relazione simbolica

$$|C^i-C|=|K^i-K|.$$

Essa dice che « se un sistema $|C|$ è contenuto nel suo i-mo aggiunto, la stessa proprietà spetta ad ogni altro sistema $|K|$, ed il sistema residuo è indipendente dal sistema da cui si parte ».

Questo sistema lineare

$$|C^i-C|$$

avrà dunque carattere invariante rispetto alle trasformazioni birazionali della superficie, purchè si prescinda dal fatto che una siffatta trasformazione può aggiungere o togliere al sistema certe componenti fisse eccezionali (cfr. n.° 2).

Siccome « ogni curva eccezionale della superficie F compare, contata i volte, come componente fissa di $|C^i-C|$ », così potremo dire: *il sistema* $|C^i-C|$ *spogliato delle curve eccezionali della superficie F che entrano in esso come componenti fisse, ciascuna i volte, ha (quando esiste) una relazione invariante colla superficie.*

Questo sistema

$$|C^i - C| = |i\,C' - i\,C|,$$

spogliato delle sue componenti eccezionali, secondo la convenzione ora fatta, sarà detto il *sistema i-canonico* della superficie (*sistema canonico* quando $i=1$); il numero delle curve i-canoniche linearmente indipendenti è un carattere invariante della superficie F, che si designa con P_i, e vien chiamato lo *i-genere* di F (o semplicemente il *genere* p_g per $i=1$; *bigenere* per $i=2$, ecc.) (*).

Quando il genere p_g è maggiore di 0, si ha, a fortiori, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$... Invece può essere $p_g = 0$, e $P_2 > 0$ come si ricava da effettivi esempi. In generale si deve ammettere che possano annullarsi tutti i plurigeneri fino ad un certo ordine i, ma non P_i; allora fra i plurigeneri successivi saranno certo non nulli almeno P_{2i}, P_{3i},... È infine utile notare che se per una superficie F uno dei plurigeneri P_i è maggiore di 0, per ogni sistema lineare di genere π e grado n appartenente ad F, si ha sempre

$$n \leq 2\pi - 2,$$

comunque i caratteri n e π s'intendano definiti, in senso virtuale, o in senso effettivo. Segue di qui che tutti i plurigeneri sono nulli per le superficie contenenti un fascio di curve razionali (rigate), e così per le superficie contenenti un fascio di curve ellittiche dotato di qualche punto base, in generale per le superficie contenenti un sistema lineare per cui

$$n > 2\pi - 2.$$

Quando esistono effettive curve i-canoniche, i caratteri di esse forniscono nuovi caratteri geometrici della superficie (cfr. n.° 20).

I plurigeneri della superficie F si possono definire anche nel modo seguente:

Si proietti F (da punti esterni generici) in una superficie F_1 dello stesso ordine n nello spazio ordinario S_3, in guisa che F_1 sia dotata soltanto di curva

(*) L'invarianza del sistema canonico e quindi del genere è stata stabilita algebricamente dal sig. NOETHER nella Memoria *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*, Mathem. Annalen Bd. 2, 8. L'invarianza delle curve pluricanoniche e dei plurigeneri è stabilita da ENRIQUES l. c., § 39. Esempi di superficie con $p_g = 0$, $P_2 > 0$ sono stati dati da ENRIQUES l. c.; CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero*, Memorie della Società ital. d. Scienze (dei XL) (serie III), t. X (1896); ENRIQUES, *Sui piani doppi di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, Rendic. Accad. dei Lincei, 1898.

doppia e di punti tripli che siano tripli anche per la detta curva. Allora le curve i-canoniche (all'infuori di eventuali curve eccezionali) si possono costruire segando F_1 colle superficie *i-aggiunte* d'ordine $i(n-4)$.

S'intende per superficie *i-aggiunta* ad F_1 una superficie Φ, che passa per la curva doppia di F_1, e sega F_1 nell'intorno della detta curva come se passasse i volte per essa; dunque sono *aggiunte* (semplici) a F_1 le superficie passanti semplicemente per la sua curva doppia; sono *biaggiunte* le superficie passanti per essa doppiamente; sono *triaggiunte* le superficie che passano doppiamente per la curva doppia di F_1 e toccano le due falde di F_1, ecc.

Abbiamo così che *P_i è il numero delle superficie $\Phi_{i(n-4)}$, d'ordine $i(n-4)$, i-aggiunte ad F_1, che sono linearmente indipendenti, e tali che nessuna superficie del sistema lineare da quelle determinato contenga la F_1.*

4. Tra i caratteri aritmetici della superficie F, ha importanza fondamentale il *genere aritmetico* o *numerico* che indicheremo con p_a (o p_n). Riferendoci alla nominata proiezione F_1 di F in S_3, il p_a viene definito come il valore aritmetico della espressione che indica, in base ai caratteri della curva doppia di F_1, quante sono le superficie Φ_{n-4}, linearmente indipendenti, aggiunte ad F_1, nell'ipotesi di validità delle formule di postulazione di Noether (*). Questa definizione è legata alla circostanza che F_1 è dotata di singolarità ordinarie (anzi di sola curva doppia e punti tripli).

Il genere aritmetico p_a può essere definito indipendentemente da questa particolare rappresentazione della superficie F, nel seguente modo:

Si consideri su F un sistema lineare irriducibile, ∞^3 almeno, $|C|$, e si indichino con $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ le deficienze delle serie lineari di gruppi di punti segate su una C generica dai sistemi di curve

$$|C'|, \quad |C+C'|, \quad |2C+C'| \ldots;$$

sussiste allora l'uguaglianza fondamentale

$$p_g - p_a = \Sigma\, \delta_i \text{ (**)}.$$

Questa uguaglianza, quando si sia provata l'invarianza del 2.° membro, definisce il carattere invariante p_a, essendo già stabilita l'invarianza di p_g (genere geometrico).

Si hanno pure due teoremi che pongono in luce l'invarianza ed il significato della differenza $p_g - p_a$, e quindi del genere numerico p_a:

(*) Cfr. Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, Annali di Matematica (serie 2), tom. V (1871).

(**) Enriques, *Introduzione* ..., citata, § 40.

La deficienza della serie (canonica) *segata sopra la curva generica d'un sistema lineare irriducibile* $|C|$ *dal sistema aggiunto* $|C'|$ *ammette come massimo* $p_g - p_a$ (*), ed esistono sistemi in relazione ai quali il massimo è raggiunto; dunque la dimensione di $|C'|$ è sempre

$$\geqq p_a + \pi - 1$$

designando con π il genere di $|C|$ (essa è d'altra parte $\leqq p_g + \pi - 1$).

La deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare irriducibile $|C|$ (serie segata sopra una C generica dalle altre C) *ammette come massimo* $p_g - p_a$, ed esistono sistemi per i quali il massimo è raggiunto (**).

Da quest'ultimo teorema segue, come corollario, la *estensione* alle superficie *del notissimo teorema di* Riemann-Roch, che per i sistemi *non speciali* di curve, cioè non contenuti nel sistema canonico, si enuncia nel modo seguente (***):

Se $|C|$ *è un sistema lineare irriducibile, non speciale, di genere* π, *grado* n, *dimensione* r, *appartenente ad una superficie di genere numerico* p_a, *sussiste la relazione*

$$r \geqq n - \pi + 1 + p_a.$$

Designeremo brevemente il teorema precedente col nome di *teorema di* Riemann-Roch *per le superficie.*

Esistono sistemi (non speciali) per i quali sussiste l'uguaglianza

$$r = n - \pi + 1 + p_a;$$

tali sistemi diconsi *regolari*. Si possono anzi costruire sistemi regolari di dimensione alta quanto si vuole, giacchè si dimostra che è regolare il sistema $|(h K)'|$ aggiunto al multiplo secondo h di un sistema $|K|$ irriducibile, almeno ∞^3, purchè h sia sufficientemente elevato; basta p. e. prendere

$$h > p_g - p_a.$$

(*) Enriques, l. c.

(**) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali*... Annali di Matematica (serie 2), tom. XXV (1897), n.° 29 e seg.

(***) Questo enunciato relativamente al caso $p_g = p_a$ *(superficie regolari)* si trova in una Nota del sig. Noether, Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., t. CIII, 1886. Della sua giustificazione, sempre pel caso delle superficie regolari, si è occupato Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, IV, 2, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino (1893). La dimostrazione generale del teorema fu data da Castelnuovo, l. c., n.° 34.

Le due proprietà più notevoli di un sistema regolare sono (*):

1) *la serie caratteristica di un sistema regolare ha la deficienza massima* $p_g - p_a$;

2) *la serie segata dal sistema canonico sopra ogni curva di un sistema regolare è completa.*

L'ultima proposizione per le superficie che hanno il genere geometrico $p_g = 0$ dice che 2') *la serie caratteristica di un sistema regolare è non speciale.*

Ora valendoci di questi risultati siamo in grado di *estendere la formola data dal teorema di* Riemann-Roch $r \geqq n - \pi + 1 + p_a$ *anche ai sistemi lineari riducibili.* Per brevità ci limiteremo a dar l'estensione nel caso $p_g = 0$, che solo interessa pel seguito del nostro lavoro.

Partiamo perciò da un sistema regolare irriducibile $|K|$ almeno ∞^3 di di grado N, dimensione R, genere Π, e consideriamo una curva γ formante parte di una particolare curva K. Il sistema $|K|$ sega sulla γ una serie di cui l'ordine sia i; diciamo anzitutto che una tal serie è non speciale. Ciò segue dal fatto che se immaginiamo in uno S_3 una superficie F, d'ordine N, di cui le sezioni piane siano curve K, una delle quali si spezzi nella γ d'ordine i e in una curva residua C, poichè (in virtù della 2')) una sezione piana K non ammette curve aggiunte d'ordine $N - 4$, non potrà nemmeno la γ ammettere curve aggiunte d'ordine $i - 4$, giacchè in caso opposto una tal curva aggiunta, insieme alla C, darebbe una curva d'ordine

$$i - 4 + N - i = N - 4$$

aggiunta alla sezione piana $\gamma + C$, il che è assurdo; si conclude che la serie g_i segata sulla γ dalle sezioni piane K (cioè dalle rette del piano di γ) è non speciale. Dunque la dimensione della g_i sarà $\rho \leqq i - \omega$, essendo ω il genere di γ; in altri termini, occorrono $\rho + 1 \leqq i - \omega + 1$ condizioni perchè una K contenga la γ. Segue che la dimensione del sistema residuo $|C| = |K - \gamma|$ sarà

$$r \geqq R - i + \omega - 1.$$

Per calcolare il genere π e il grado n di $|C|$ in base agli analoghi caratteri Π, N di $|K|$, ci conviene introdurre il numero j delle intersezioni di γ

(*) Castelnuovo, l. c., n.[i] 35, 36.

con una C; avremo allora, come risulta subito,

$$\pi = \Pi - j - \omega + 1,$$

$$n = N - j - i.$$

E di qua si ricava

$$r - n + \pi \geqq R - N + \Pi,$$

ossia (poichè $|K|$ è regolare)

$$r - n + \pi \geqq p_a + 1,$$

la quale dimostra che per il sistema $|C|$ vale il teorema di Riemann-Roch; e ciò senza che si sia posta la restrizione della irriducibilità di $|C|$.

Ora per dimostrare che il teorema di Riemann-Roch vale per *ogni sistema riducibile* $|C|$, basta osservare che dato comunque $|C|$, si può sempre costruire un sistema irriducibile $|K| = |(h D)'|$ (aggiunto al sistema h-uplo di un sistema irriducibile D), il quale sia regolare, e tanto ampio da contenere $|D|$ in guisa che il residuo $|K - C| = |\gamma|$ sia per di più irriducibile; basta infatti per ciò sceglier h sufficientemente elevato. Supponendo, per semplicità, che il sistema $|D'|$ sia irriducibile, si prenderà a tal fine, in primo luogo $h > - p_a$, per assicurare la regolarità di $|(h D)'|$, in secondo luogo h così grande ancora che il sistema $|(h-1) D|$ contenga $|C|$ per modo che $|(h-1) D - C|$ sia irriducibile, giacchè allora seguirà, a fortiori, la irriducibilità di

$$|(h D)' - C| = |(h-1) D - C + D'|.$$

5. Fra i caratteri aritmetici della superficie F, si debbono porre anche alcuni *invarianti relativi*, cioè caratteri invariabili per quelle particolari trasformazioni birazionali che non introducono (in nessuno dei due sensi) curve eccezionali, come trasformate di punti semplici. Da questi invarianti relativi si possono desumere poi, operando convenientemente, degli invarianti *assoluti*.

Il *primo invariante relativo*, che designeremo con ω, si definisce nel modo seguente:

Prendiamo sopra F un qualsiasi sistema lineare $|C|$, virtualmente privo di punti base, e dotato d'un sistema aggiunto $|C'|$. Sieno π, n, il genere e il grado di $|C|$, sia π' il genere di $|C'|$. *L'espressione*

$$\omega = \pi' - 3(\pi - 1) + n,$$

come risulta dalla proprietà fondamentale del sistema aggiunto, *non dipende dalla scelta del sistema* $|C|$, *e costituisce perciò un invariante relativo della superficie* F (*). Infatti se si trasforma birazionalmente la superficie F in una superficie F^*, in guisa che le sezioni piane (o iperpiane) di F ed F^* abbiano per immagine rispettivamente su F^* ed F curve di un sistema privo di punti base, il valore di ω calcolato coi caratteri delle sezioni piane di F, coincide col valore di ω calcolato in relazione alle sezioni piane di F^*. Al contrario il carattere ω diminuisce in quelle trasformazioni di F che introducono su F^* nuove curve eccezionali corrispondenti a punti della F stessa, e precisamente diminuisce di una unità per ogni curva eccezionale introdotta; aumenta invece di una unità per ogni curva eccezionale di F che scompare venendo trasformata in un punto semplice di F^*.

Si potrebbe avere un'altra espressione analoga di ω introducendo, in luogo di π', il grado n' del sistema aggiunto $|C'|$, che vale (n.° 2)

$$n' = \pi + \pi' - 2;$$

è qui utile notare la formula

$$n - (2\pi - 2) = n' - (2\pi' - 2) + \omega - 1.$$

Una terza espressione, più notevole, dello stesso invariante ω, si ha introducendo anche il genere π'' del sistema $|C''|$, secondo aggiunto di $|C|$. Si trova infatti (**)

$$\omega - 1 = \pi - \pi' - (\pi' - \pi'').$$

Noi vedremo in seguito (n.° 20) che se la superficie F non possiede curve eccezionali, il carattere ω di questa è un invariante assoluto, e non differisce dal *genere lineare* $p^{(1)}$ definito dal sig. Noether (come genere delle curve canoniche) e più tardi, sotto ipotesi più generali, da Enriques.

Ma óra, senza insistere su ciò, vogliamo mostrare come la conoscenza dell'invariante relativo ω di una superficie possa permettere di fissare un limite inferiore al valore dello i-genere P_i della superficie, in corrispondenza ad ogni valore di i (***).

Partiamo perciò da una superficie F di genere aritmetico p_a, sopra cui esista un sistema $|C|$ irriducibile, privo di punti base, tale che tra il grado n

(*) Cfr. Enriques, *Introduzione*..., § 41.

(**) Castelnuovo, *Sul genere lineare*... Rendic. Accad. d. Lincei, giugno 1897.

(***) Cfr. Castelnuovo, l. c.

e il genere π passi la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$; sia ad es. il sistema delle sezioni piane. Potendosi, ove occorra, sostituire a $|C|$ un suo multiplo, pur continuando a valere una disuguaglianza analoga alla precedente, siamo liberi di ammettere, senza introdurre restrizioni, che il sistema $|C|$ possegga un sistema aggiunto $|C'|$; indichiamone il genere con π' ed il grado con

$$n' = \pi + \pi' - 2.$$

Ciò posto, proponiamoci di calcolare i caratteri del sistema $|K^i| = |i C' - i C|$, che (ove esista) è il sistema i-canonico, o tutt' al più ne differisce per qualche curva eccezionale fissa; supporremo $i > 1$. Cominceremo per ciò a calcolare la dimensione r_i' di $|i C'|$, di cui un limite inferiore si può esprimere, mediante il teorema di Riemann-Roch esteso alle superficie, in funzione del grado e del genere di $|i C'|$, e quindi del grado e del genere di $|C'|$; fatti i calcoli si trova

$$r_i' \geqq p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\pi - 1) + \frac{i(i-1)}{2}(\pi' - 1).$$

Consideriamo poi la serie che il sistema $|i C'|$ sega sopra la curva generica di $|i C|$; la detta serie ha l'ordine $2 i^2 (\pi - 1)$, ed è certo non speciale perchè il genere della curva a cui appartiene vale

$$i(\pi - 1) + \frac{i(i-1)}{2} n + 1 < i^2 (\pi - 1) + 1 \qquad (n < 2\pi - 2, \quad i > 1).$$

Segue che la dimensione della serie stessa sarà

$$\rho_i \leqq i(2i - 1)(\pi - 1) - \frac{i(i-1)}{2} n - 1.$$

Dunque finalmente la dimensione del sistema $|K^i| = |i C' - i C|$ verrà data da

$$R_i = r_i' - \rho_i - 1 \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(n + \pi' - 3\pi + 2).$$

Ora il numero $R_i + 1$ delle curve K^i linearmente indipendenti è, per definizione, lo i-genere P_i della superficie; si arriva così, tenendo conto inoltre della definizione di ω, alla formola richiesta

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1 \qquad (n < 2\pi - 2, \; i > 1). \tag{1}$$

È qui da osservare che la (1) vale anche nella ipotesi $n = 2\pi - 2$, purchè allora si sappia che la serie segata dal sistema $|i C'|$ sopra una curva

generica di $|C|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale, occorrerebbe modificar la (1) diminuendo di una unità il secondo membro. In ogni caso ($n \leqq 2\pi - 2$) si trova che il genere (virtuale) Π_i e il grado (virtuale) N_i del sistema $|K^i|$ sono espressi da

$$\Pi_i = \frac{i(i+1)}{2}(\omega - 1) + 1, \quad N_i = i^2(\omega - 1). \tag{2}$$

Noi siamo partiti dalla ipotesi che il sistema $|C|$ delle sezioni piane di F abbia $n \leqq 2\pi - 2$; se invece sussistesse la disuguaglianza contraria $n > 2\pi - 2$, o la $\pi > \pi'$ in qualche modo equivalente alla precedente, allora non esisterebbe certo il sistema $|K^i| = |iC' - iC|$, ma potrebbe esistere il sistema $|K^{-i}| = |iC - iC'|$. Del detto sistema si calcolano facilmente la dimensione R_{-i}, il grado N_{-i} e il genere Π_{-i} ($i \geqq 1$) seguendo una via perfettamente analoga a quella sopra indicata. Si trova precisamente, se $\pi > \pi'$,

$$R_{-i} \geqq p_a + \frac{i(i+1)}{2}(\omega - 1), \tag{1'}$$

$$\Pi_{-i} = \frac{i(i-1)}{2}(\omega - 1) + 1, \quad N_{-i} = i^2(\omega - 1). \tag{2'}$$

Ma il sistema $|K^{-i}|$ non offre grande interesse, perchè, come vedremo, esso non può presentarsi che sopra le superficie razionali o rigate.

6. Un *secondo invariante relativo* della superficie F, si ottiene nel modo seguente:

Si consideri sopra F un fascio lineare di curve irriducibili, di genere $\pi > 0$, avente n punti base (considerando ora come punto base *assegnato*, *ogni* punto comune alle curve del fascio), e si designi con δ il numero delle curve del fascio dotate di un punto doppio; *l'espressione*

$$I = \delta - n - 4\pi$$

non dipende dalla scelta arbitraria del fascio, e costituisce perciò un invariante relativo della superficie (*).

(*) Cfr. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie*... Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1896. L'espressione I per un fascio di sezioni piane di una superficie (dello spazio S_3) fu considerata dapprima dal Sig. ZEUTHEN, che ne mise in luce il carattere invariante sotto una forma un pò diversa (V. il n.° 24 delle *Études géométriques*... Mathem. Annalen, IV, 1871), e più tardi dal Sig. NOETHER (*Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*... Mathem. Annalen, VIII, 1874, pag. 526), il quale ne diede l'espressione per mezzo dei due generi p_a, $p^{(1)}$ della superficie, come sarà indicato nel seguito.

Questo carattere varia, come ω, ma in senso opposto, nelle trasformazioni che introducono nuove curve eccezionali, o al contrario ne fanno scomparire.

Riproduciamo brevemente, per chiarezza, la dimostrazione che di queste proprietà dà il sig. Segre, rimandando il lettore, desideroso di maggiori particolari, alla Memoria originale citata.

Siano $|C|$, $|C_1|$ due fasci lineari situati sulla nostra superficie, fasci che possiamo supporre del tutto indipendenti tra loro; indichiamo con π, π_1 i generi delle curve C, C_1, con n, n_1 i numeri dei punti base dei due fasci, con s il numero dei punti comuni a due curve generiche C, C_1. Fissiamo la nostra attenzione sulla curva T luogo dei punti di contatto di una C con una C_1; ed esaminiamo in quanti punti la T sia segata da una C e da una C_1, fuori dei punti base dei due fasci. I punti comuni alla T e ad una C sono evidentemente i punti doppi della serie g_s^1 segata sulla C dal fascio $|C_1|$; il loro numero è

$$M = 2s + 2\pi - 2.$$

Similmente si riconosce che la T è segata da una C_1 in

$$M_1 = 2s + 2\pi_1 - 2$$

punti. Al variare della C e della C_1 questi due gruppi di punti descrivono sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine M ed M_1 rispettivamente; detto P il genere di T, la prima serie avrà $2M + 2P - 2$ punti doppi e la seconda $2M_1 + 2P - 2$. Ora una semplice osservazione mostra che un punto doppio della prima serie (segata da $|C|$ su T) è o un punto doppio di una curva del fascio $|C|$ che sia dotata di una tale singolarità, o un contatto tripunto di una curva C e di una curva C_1 che abbiano un siffatto contatto, o finalmente un punto base del fascio $|C_1|$. Indicando perciò con δ il numero delle curve di $|C|$ che son dotate di un punto doppio, con δ_1 il numero analogo per $|C_1|$, e con τ il numero delle coppie di curve C, C_1 che hanno un contatto tripunto, abbiamo la relazione

$$2M + 2P - 2 = \delta + \tau + n_1,$$

e similmente l'altra

$$2M_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n.$$

Di qua sottraendo e sostituendo ad M, M_1 i loro valori, si trova in fine

$$\delta - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1,$$

uguaglianza che dimostra il carattere invariantivo della espressione

$$I = \delta - n - 4\pi,$$

per i fasci tracciati sulla nostra superficie.

La definizione del carattere I, per essere applicata a *tutti* i casi, esige alcune particolari convenzioni relative al valore da attribuire a δ, quando nel fascio considerato si abbiano curve dotate di punti multipli d'ordine > 2, oppure quando il fascio stesso abbia dei punti base infinitamente vicini, o infine quando esistano nel fascio delle curve contate due o più volte. Nei primi due casi (che sono stati analizzati dal Segre, corrispondentemente alle ipotesi più semplici) si può dire che il δ viene definito seguendo la legge della continuità, sempre valida nel campo algebrico: ogni curva dotata d'un punto multiplo viene a contare un certo numero di volte nella determinazione del δ, onde questo è sempre (ciò che a noi importa nel seguito) maggiore o uguale a 0.

Quando invece esiste nel fascio dato $|C|$ una curva contata due (o più) volte, si può dire, aritmeticamente, che essa equivale ad un certo numero di curve del fascio dotate d'un punto doppio, numero che entra a costituire il δ; ma non è evidente che il detto numero sia $\geqq 0$; occorre precisamente di provare che così è, per poter asserire che in ogni caso si ha $\delta \geqq 0$.

Supponiamo adunque che una particolar curva $C^{(0)}$ del fascio $|C|$ si spezzi in guisa chè una sua componente irriducibile χ, di genere $\rho \geqq 0$, sia da contarsi due o più volte, ad es. due volte, sicchè $C^{(0)} = 2\chi + \psi$, dove ψ indica la curva residua che potrebbe del resto mancare. Qui si osservi che $C^{(0)}$ può anche avere in un qualche punto base di $|C|$ una molteplicità superiore di una, due... unità a quella che presenta ivi la curva C generica; ma in tal caso si deve riguardare la curva $C^{(0)}$ come composta della curva propriamente detta, a cui va aggiunto il punto base (o la curva eccezionale in cui può trasformarsi) contato una, due... volte; sicchè il detto punto semplice o multiplo deve esser riguardato come componente di ψ. Le due parti χ e ψ di $C^{(0)}$ avranno un certo numero i di punti comuni (fatta astrazione da quelli che vengono assorbiti dai punti base di $|C|$, presi coll'ordine di molteplicità relativo alla curva C generica); e sarà certo $i > 0$ se ψ esiste, in virtù di una osservazione fatta nel n.° 1.

Accanto al fascio $|C|$ consideriamo un secondo fascio generico $|C_1|$ affatto indipendente dal primo; ed occupiamoci come prima (e adottando le stesse notazioni) della curva luogo dei contatti di una C e di una C_1.

La nostra curva questa volta si spezza nella χ (che è componente dop-

pia di $C^{(0)}$) e in una curva T di genere P su cui fisseremo la nostra attenzione. Osserviamo subito che la T passerà semplicemente per le i intersezioni di χ e ψ, giacchè i detti punti, essendo tripli per la curva $C^{(0)} = 2\chi + \psi$, devono esser doppi per la curva (luogo dei contatti) $T + \chi$.

La curva T è segata da una C generica (fuori dei punti base di $|C|$) nei punti in cui C è toccata da una C_1, vale a dire in

$$M = 2s + 2\pi - 2$$

punti. Similmente vediamo che la curva T è segata da una C_1 generica nei punti in cui C_1 vien toccata da una C, tolti però tra questi i punti in cui C_1 è segata dalla χ; indicando dunque con M_1 il numero delle intersezioni di T e C_1 (fuori dei punti base di $|C_1|$), e con σ il numero delle intersezioni di χ e C_1, avremo

$$M_1 + \sigma = 2s + 2\pi_1 - 2.$$

I due fasci $|C|$, $|C_1|$ determinano così sulla T due serie lineari ∞^1 di ordine M, M_1. La prima serie ha $2M + 2P - 2$ punti doppi, ma tra questi alcuni appartengono al gruppo segato su T dalla $C^{(0)} = 2\chi + \psi$; e precisamente questo gruppo, contenendo i punti tripli (nelle i intersezioni di χ e ψ) e $2\sigma + 2\rho - 2$ punti doppi (nei contatti di χ con curve C_1), conta per $2i + 2\sigma + 2\rho - 2$ punti doppi tra quelli che la serie considerata possiede. Gli altri punti doppi della detta serie provengono (come nel ragionamento generale) dai Δ punti doppi isolati posseduti da curve C, dai τ contatti tripunti di una C con una C_1, e finalmente dagli n_1 punti base del fascio $|C|$. Sicchè abbiamo l'uguaglianza

$$2M + 2P - 2 = \Delta + \tau + n_1 + 2i + 2\sigma + 2\rho - 2.$$

Consideriamo in secondo luogo la serie di ordine M_1 segata sopra T dal fascio $|C_1|$. I $2M_1 + 2P - 2$ punti doppi di questa provengono dai δ_1 punti doppi isolati di curve C_1, dai τ contatti tripunti sopra nominati, e finalmente dagli n punti base del fascio $|C|$; dunque

$$2M_1 + 2P - 2 = \delta_1 + \tau + n.$$

Paragonando colla precedente, e tenendo conto dei valori trovati per M, M_1, avremo in fine

$$\Delta + (2\rho - 2 + 2i) - n - 4\pi = \delta_1 - n_1 - 4\pi_1.$$

Si conclude che la curva χ di genere ρ, componente doppia di una par-

ticolare curva C, conta nel numero delle curve C dotate di punto doppio come $2\rho - 2 + 2i$ unità, dove i è il numero delle intersezioni di χ colla curva residua ψ. Ora se ψ esiste, ed è quindi $i > 0$, sarà certo $2\rho - 2 + 2i \geq 0$ (poichè $\rho \geq 0$) La stessa conclusione vale se, mancando la ψ, il genere ρ di χ fosse superiore a 0. Ma evidentemente la conclusione ultima cadrebbe se una curva C risultasse dal raddoppiamento di una curva χ razionale, in modo che in ciascun punto base del fascio la molteplicità di 2χ riuscisse uguale alla molteplicità della C generica.

Ora mostreremo che questo caso è impossibile. Infatti, poichè il genere di 2χ è uguale al genere $\pi \geq 0$ di C, se χ fosse razionale, dovrebbe χ avere $\pi + 1 > 0$ intersezioni con se stessa, cioè $\pi + 1 > 0$ sarebbe il grado di χ, e quindi $4(\pi + 1) > 0$ sarebbe il grado di 2χ ossia di $|C|$. Ma siccome d'altra parte $|C|$ è un fascio, in cui ogni punto comune a due C vien considerato come punto base assegnato, il grado di $|C|$ è *zero*, il che contraddice l'ultimo risultato. Dunque in ogni caso la curva doppia χ equivale a un numero positivo o nullo di curve C dotate di punto doppio.

Questa conclusione sussiste pure se la χ entra $k \geq 2$ volte come componente di una particolar curva del fascio $|C|$, perchè allora si trova che la χ conta come $2\rho - 2 + ki \geq 0$ curve C dotate di punto doppio. E ad un analogo risultato si perverrebbe se una particolare curva C contenesse più parti ciascuna da contarsi più volte.

Permane sempre adunque la conclusione generale che *una componente multipla di una curva del fascio equivale ad un certo numero* ≥ 0 *di curve del fascio dotate d'un punto doppio*, di guisa che, valutando secondo tale equivalenza il « numero δ delle curve del fascio dotate d'un punto doppio », sempre risulta

$$\delta \geq 0,$$

e l'espressione

$$\delta - n - 4\pi$$

ha il valore dell'invariante I.

Abbiamo affermato poc'anzi che il carattere I è un invariante relativo, e precisamente che esso aumenta di una unità per ogni trasformazione della superficie F, in cui si sostituisca ad un punto di F una curva eccezionale; e diminuisce di una unità nel caso opposto. Tale affermazione si giustifica facilmente. Infatti si calcoli il valore del carattere I di F riferendosi ad un certo fascio $|C|$ tracciato su F; si trasformi quindi la F in una nuova su-

perficie F^*, per modo che ad un punto (fondamentale) O di F, non base per $|C|$, corrisponda su F^* una curva (eccezionale) χ^*; e si consideri su F^* il fascio $|C^*|$ che corrisponde a $|C|$. I caratteri n, π di $|C|$ coincidono cogli *analoghi caratteri* n^*, π^* di $|C^*|$, se i punti base di $|C^*|$ non sono fondamentali per la trasformazione, onde si ha in tale ipotesi

$$n = n^*, \quad \pi = \pi^*.$$

Ma alla curva C passante per O, corrisponde su F^* una curva composta $C^* + \chi^*$ avente un punto doppio nel punto comune alle due componenti, sicchè, *caeteris paribus*, si ha, come numero delle curve C^* dotate d'un punto doppio,

$$\delta^* = \delta + 1,$$

e il carattere $I^* = \delta^* - n^* - 4\pi^*$ di F^* vale

$$I^* = I + 1.$$

Allo stesso resultato si perviene nell'ipotesi che il punto fondamentale O di F sia un punto base per $|C|$; in questo caso non muta il valore di δ, ma il fascio perde nella trasformazione un punto base, onde $n^* = n - 1$.

Segue di qui che I si comporta come l'invariante ω, colla differenza però che mentre I cresce o decresce di una o più unità, ω decresce o cresce dello stesso numero.

Dunque $\omega + I$ sarà un *invariante assoluto* relativamente ad una qualsiasi trasformazione birazionale della superficie. Si può chiedere in quale rapporto esso stia cogli altri invarianti già noti. Si trova che *l'invariante $\omega + I$ è strettamente legato al genere aritmetico dalla notevolissima relazione*

$$\omega + I = 12\,p_a + 9.$$

Questa formola si può dire stabilita dal sig. Noether (*), il quale veramente pone al posto di ω il *genere lineare* $p^{(1)}$ (genere delle curve canoniche), supponendo dunque $p_g > 0$, e riferendosi ad una superficie priva di curve eccezionali, dotata di singolarità ordinarie. La sostituzione di ω a $p^{(1)}$ rende la relazione precedente valida indipendentemente dal valore del p_g, e dall'esistenza di curve eccezionali. Effettivamente se si proietta la data superficie F in una superficie F_1 di S_3, dotata soltanto di curva doppia e punti tripli, basta calcolare I riferendosi ad un fascio di sezioni piane di F_1, e p_a,

(*) *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...* Mathem. Annalen VIII (1874), pag. 526.

ω) mediante le formule di equivalenza e di postulazione di CAYLEY-NOETHER, per trovare verificata la relazione sopra scritta (come appunto fa il NOETHER con quelle ipotesi più restrittive).

Osservazione. — L'invariante relativo I di una superficie F venne sopra definito mediante i caratteri (δ, n e π) di un fascio *lineare* di curve appartenente alla superficie stessa. Ora, pel seguito, giova notare come si possa calcolare I anche quando si parta da un fascio *irrazionale* di curve supposto esistente su F, vale a dire da un sistema composto di ∞^1 curve, tale che per ogni punto di F passi una sola curva del sistema, senza però che le singole curve possano farsi corrispondere birazionalmente ai singoli valori di un parametro.

Sia $[\Gamma]$ un fascio irrazionale di curve sopra F; indichiamo con ρ il genere della curva Γ generica, con $\rho' > 0$ il genere che ha il fascio, ove si considerino le curve come elementi. Notiamo subito che, supposta al solito la F priva di singolarità, il fascio irrazionale non può avere sopra F alcun punto base; giacchè un punto base di $[\Gamma]$ dovrebbe riguardarsi come una traiettoria *razionale* delle ∞^1 Γ, sulla quale le curve stesse segherebbero una involuzione *irrazionale*, il che è assurdo (teorema di LÜROTH). Ciò premesso, per ottenere la formola desiderata, noi possiamo seguire due vie.

La prima via consiste nell'applicare il ragionamento sopra riferito del sig. SEGRE al fascio irrazionale $[\Gamma]$ e ad un fascio razionale $|C|$ tracciato sulla stessa superficie. Il detto ragionamento va solo modificato in ciò che le due serie di gruppi di punti segate da $[\Gamma]$ sopra una C e sopra la curva dei contatti T, sono questa volta irrazionali, di genere ρ'; a quelle serie va dunque applicata la nota formola di ZEUTHEN che dà il numero dei punti doppi di una involuzione irrazionale.

La seconda via, che parte da un concetto meno semplice, ma conduce più rapidamente allo scopo, consiste nel formare un fascio *lineare* $|C|$ in cui ogni curva C sia composta di un certo numero m di curve Γ; ciò si ottiene, quando m sia sufficientemente alto, fissando entro al fascio $[\Gamma]$ (sistema ∞^1 di genere ρ') una serie lineare g^1_m di gruppi di m curve Γ. Il fascio lineare $|C|$ così costruito ha *zero* punti base; ed il genere di una sua curva C vale

$$\pi = m(\rho - 1) + 1.$$

Detto adunque δ il numero delle curve C dotate di un punto doppio, si ha, per la formola già dimostrata (che subito si estende ai fasci $|C|$ riducibili),

$$I = \delta - 4m(\rho - 1) - 4.$$

Ora una curva composta C possiede un punto doppio, sia quando una Γ componente ha un punto doppio, sia quando due delle Γ componenti la stessa C coincidono, e nell'ultimo caso anzi la C conta per $2\rho - 2$ unità entro al gruppo delle δ curve C sopra nominate. Ora siccome l'ultimo caso si presenta $2m + 2\rho' - 2$ volte (cioè tante volte quanti sono gli elementi doppi di una g_m^1 sopra un ente di genere ρ'), così si avrà la relazione

$$\delta = \Delta + (2\rho - 2)(2m + 2\rho' - 2),$$

ove Δ è il numero delle curve Γ dotate di un punto doppio. Sostituendo nella espressione di I, si trova infine la formola

$$I = \Delta + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4$$

che risolve appunto la questione proposta.

7. La relazione di Noether data innanzi permette di dedurre una diseguaglianza, che ha (come vedremo più tardi) importanza fondamentale nello studio dei sistemi lineari appartenenti alle superficie di genere geometrico

$$p_g = 0$$

e di genere numerico

$$p_a = -p \qquad (p \geqq 0).$$

Si consideri sopra F un sistema lineare $|C|$ di curve irriducibili, di grado n e genere π, privo di punti base. Indicando con δ il numero delle curve dotate di punto doppio appartenenti ad un suo fascio generico, avremo

$$I = \delta - n - 4\pi = 12\,p_a - \omega + 9,$$

ossia ponendo $p_a = -p$,

$$4\pi + n = 12\,p + \omega - 9 + \delta.$$

Ma, per il teorema di Riemann-Roch (n.° 4),

$$\pi - 1 - n + r \geqq -p,$$

quindi

$$5\pi + r \geqq 11\,p + \omega - 8 + \delta.$$

Questa diseguaglianza si estende al caso in cui $|C|$ abbia dei punti base accidentali sopra la superficie F, quando si designi con π il genere virtuale di $|C|$, mantenendo per δ il significato precedente.

Basta perciò mostrare che in ogni caso (essendo n il grado virtuale di $|C|$) si ha

$$4\pi + n \geqq 12\,p + \omega - 9 + \delta.$$

Ora, designando con π_e, n_e, il genere e il grado effettivi del sistema irriducibile $|C|$, con $h_1 \dots h_\sigma$ gli ordini di moltiplicità dei suoi σ punti base, avremo

$$n = n_e + \sum_1^\sigma h^2, \qquad \pi = \pi_e + \sum_1^\sigma \frac{h(h-1)}{2} \geqq \pi_e,$$

$$4\pi + n \geqq 4\pi_e + n_e + \sum_1^\sigma h^2,$$

e poichè

$$\sum_1^\sigma h^2 \geqq \sigma,$$

segue

$$4\pi + n \geqq 4\pi_e + n_e + \sigma.$$

D'altra parte, valutando I in relazione ad un fascio contenuto in $|C|$, si trova

$$I = \delta - (n_e + \sigma) - 4\pi_e,$$

e quindi

$$4\pi_e + n_e + \sigma = 12p + \omega - 9 + \delta,$$

onde segue la disuguaglianza da dimostrare.

Tenendo conto che in ogni caso $\delta \geqq 0$, si conclude che *per ogni sistema lineare irriducibile, ∞^1 almeno, virtualmente privo di punti base sopra la superficie F, vale la disuguaglianza*

$$5\pi + r \geqq 11p + \omega - 8.$$

III. Sulle curve eccezionali.

8. Innanzi di procedere allo studio delle superficie sopra cui il procedimento di aggiunzione, applicato ad un qualunque sistema lineare, si estingue dopo un numero finito di operazioni, è indispensabile che premettiamo alcune considerazioni relativamente alle curve eccezionali che possono appartenere ad una superficie.

Ci riferiamo, al solito, ad una superficie F priva di singolarità, appartenente ad un certo spazio S_r.

Abbiam detto che una curva γ di F (che in qualche caso particolare potrà anche essere composta, come spiegheremo più tardi) dicesi *eccezionale*,

se si può trasformare birazionalmente la superficie F in una superficie F^* per modo che alla γ corrisponda l'intorno di un punto semplice G^* su F^*; in tal caso si può anche supporre, senza introdurre restrizioni, che la F^* sia come F una superficie priva di punti singolari. Nella trasformazione sopra nominata, alle sezioni piane o iperpiane di F^* corrisponderanno su F delle curve C componenti un sistema lineare; questo sistema trasformante potrà avere o non avere punti base sopra la curva γ.

Nel 2.° caso la γ non avrà alcuna intersezione colle curve generiche C, ossia sarà *fondamentale* per $|C|$; inoltre ad ogni punto di essa corrisponderà un punto nell'intorno del nominato punto G^*. Nel 1.° caso invece i punti base di $|C|$ che si trovano su γ saranno *punti fondamentali* per la trasformazione, ed avranno come corrispondenti su F^* delle curve (eccezionali) passanti per G^*.

Una curva eccezionale di F che non contenga punti fondamentali verrà detta una *curva eccezionale di 1.ª specie*, mentre chiameremo di *2.ª specie* una curva eccezionale contenente necessariamente qualche punto fondamentale, curva tale cioè che non possa essere mutata in un punto senza che qualche punto di essa si muti in una curva.

Una curva eccezionale di 1.ª specie γ ha gli stessi caratteri, grado e genere virtuali, dell'intorno di un punto semplice della superficie; precisamente denotando con ν il grado e con ρ il genere di γ, si ha

$$\nu = -1, \qquad \rho = 0.$$

L'eguaglianza $\rho = 0$ segue dal fatto che la curva γ, la quale è razionale, non ha punti doppi, poichè questi sarebbero punti fondamentali.

Quanto a ν, per trovarne il valore, basta ricorrere alla definizione (n.° 1) di grado di una curva isolata (sistema lineare ∞^0), ed osservare che lo staccamento di γ da $|C|$ diminuisce di 1 il grado del sistema, mentre le curve residue hanno $i = 1$ intersezioni con γ; queste osservazioni si giustificano subito se si pensa che alle curve di $|C - \gamma|$ corrispondono su F^* le sezioni iperpiane passanti per G^*.

Alle cose dette innanzi deve aggiungersi, per chiarezza, un'osservazione.

Poniamo che si abbiano sopra la F due curve γ, γ_1, secantisi in un punto, a cui corrispondano rispettivamente sopra F^* il punto G^* ed un punto G^*_1 infinitamente vicino a G^*. In questo caso si troverebbe (ricorrendo alla solita definizione di grado) che il grado virtuale di γ vale $\nu = -2$, e quello di γ_1 vale $\nu_1 = -1$; (i generi di γ, γ_1 sono ambedue nulli). Si ha dun-

que, per quanto concerne γ, un'apparente contraddizione colle cose dette innanzi; ma la ragione sta in ciò che all'intorno di G^* su F^* corrisponde su F non la sola curva γ, ma la curva $\gamma + \gamma_1$, e quindi la $\gamma + \gamma_1$ deve pensarsi come *una intera curva eccezionale.* (D'altra parte anche la γ_1 da sola potrebbe pensarsi come un'intera curva eccezionale corrispondente all'intorno del punto G^*_1). Fatta questa convenzione, si trova che il grado virtuale della curva $\gamma + \gamma_1$ vale $\nu + \nu_1 + 2 = -1$, ed il genere $\rho = 0$, come innanzi si è detto.

La convenzione fatta ha del resto una portata generale: parlando di una curva eccezionale intendiamo sempre d'includere in essa tutte le componenti (curve) che rappresentano l'intorno di un punto sopra una superficie trasformata. Ed allora vale sempre l'affermazione che « una curva eccezionale di 1.ª specie ha il genere $\rho = 0$ e il grado $\nu = -1$ ».

Viceversa si può dimostrare che « una curva γ su F di genere virtuale $\rho = 0$ e grado virtuale $\nu = -1$ è una curva eccezionale di 1.ª specie ».

A tal fine suppongasi intanto che le curve K sezioni iperpiane di F formino un sistema regolare ∞^r; detto n l'ordine di F (grado del sistema) e π il genere delle nominate K, p_a il genere aritmetico della F, avremo

$$r = n - \pi + 1 + p_a.$$

Sommando a $|K|$ la curva $|\gamma|$, il cui ordine verrà designato con m, si trova che il grado di $|K + \gamma|$ vale

$$N = n + 2m + \nu = n + 2m - 1,$$

ed il suo genere

$$\Pi = \pi + \rho + m - 1 = \pi + m - 1;$$

la dimensione virtuale di $|K + \gamma|$, calcolata in base al teorema di Riemann-Roch per le superficie (dimensione inferiore od uguale alla dimensione effettiva), sarà quindi

$$R = N - \Pi + 1 + p_a = r + m.$$

L'addizione di γ amplia dunque effettivamente il sistema $|K|$, conducendo ad un nuovo sistema lineare irriducibile la cui dimensione effettiva è $\geqq r + m$.

Ma si vede anche facilmente che la dimensione effettiva è proprio $r + m$, e quindi il sistema $|K + \gamma|$ è regolare come $|K|$; infatti le curve di quello segano γ in $m + \nu = m - 1$ punti, per modo che lo staccamento di γ impone alle curve di $|K + \gamma|$ m condizioni al più.

Ora proseguendo a sommare γ a $|K+\gamma|$ e così via, si arriverà, dopo m operazioni, ad un sistema irriducibile $|K_0|=|K+m\gamma|$, le cui curve non segheranno più γ; il sistema $|K_0|$ avrà dunque la curva γ come fondamentale, e non avrà alcun punto base sopra F (come non ne aveva $|K|$). Trasformando ora la F in una superficie F^* mediante il detto sistema $|K_0|$, la γ verrà trasformata interamente in un punto semplice.

In tutto ciò che abbiamo detto figura l'ipotesi che il sistema $|K|$ delle sezioni di F sia regolare; questa ipotesi non è però essenziale, poichè ove non fosse soddisfatta, basterebbe sostituire alle K le curve d'un sistema regolare privo di punti base su F, quale è p. es. l'aggiunto ad un multiplo di $|K|$ d'ordine sufficientemente alto.

Si può applicare il procedimento esposto successivamente a più curve eccezionali di 1.ª specie appartenenti alla superficie F, purchè esse non si seghino fra loro, giacchè, sotto questa condizione, ognuna di tali curve rimane curva eccezionale di 1.ª specie nelle trasformazioni successive di F.

Dunque *è sempre possibile effettuare sopra una data superficie F una conveniente trasformazione priva di punti fondamentali su F, per modo da fare scomparire (mutandole in punti semplici) quantesivogliano curve eccezionali di 1.ª specie, non secantisi fra loro.*

Se invece si hanno su F *due* curve eccezionali di 1.ª specie γ, γ_1 aventi un punto comune (non due curve componenti insieme una sola curva eccezionale), dopo la trasformazione che muta l'una di esse, p. e. γ, in un punto G^*, la γ_1 si cambia in una curva eccezionale γ^*_1 *di 2.ª specie.* Infatti il grado virtuale di γ^*_1, come quello di $\gamma+\gamma_1$, vale $-1+(-1)+2=0$ anzichè -1. Per chiarire la cosa, si può considerare l'esempio di una superficie F che sia riferibile ad una rigata F^*, e contenga due curve γ, γ_1 con un punto comune, una delle quali γ corrisponda ad un punto G^* di F^*, e l'altra γ_1 alla generatrice γ^*_1 di F^* che passa per G^* (l'ufficio di γ, γ_1 è del resto scambievole). La nominata generatrice di F^* è una curva eccezionale di 2.ª specie, la quale non può essere trasformata in un punto semplice, senza che qualche punto di essa si muti in una nuova curva eccezionale.

9. Una curva eccezionale di 2.ª specie della superficie F, per la sua stessa natura non può essere eliminata senza che vengano create nuove curve eccezionali.

Abbiamo già visto che un esempio di curva siffatta è offerto da una generatrice d'una superficie rigata. Un altro esempio vien dato da una retta o da una conica del piano, ecc.

Che cosa si ottiene dunque applicando il procedimento esposto innanzi al caso delle curve eccezionali di 2.ª specie?

In sostanza il procedimento suddetto consiste in ciò.

Si consideri su F un sistema regolare $|K|$ privo di punti base; si trasformi F in una superficie F^*, per modo che la curva eccezionale γ, considerata su F, si muti in un punto G^* di F^*. Il sistema $|K^*|$ di F^* corrispondente a $|K|$ ha il punto G^* come punto base di un certo ordine m; quel sistema è contenuto perciò in un sistema più ampio $|K^*_1|$, ugualmente regolare, composto di curve dello stesso ordine non aventi G^* come punto base.

Ora il sistema $|K^*_1|$ di F^* ha per corrispondente su F un sistema $|K_1|$ il quale avrà la curva γ come fondamentale (sicchè potrebbe servire a trasformare la γ in un punto), ma esso possederà dei punti base su γ, se γ è una curva eccezionale di 2.ª specie, all'opposto di quel che accadeva se γ era di 1.ª specie. Si può ampliare $|K_1|$ che è contenuto in un sistema $|K_2|$ di curve dello stesso ordine (egualmente regolare) senza punti base sopra γ; ma la curva γ, fondamentale per $|K_1|$, non sarà più fondamentale per $|K_2|$. Il procedimento qui indicato non ha termine, poichè si può operare su $|K_2|$ come già si era operato su $|K|$, e così via. Ma come a priori si poteva prevedere, il detto procedimento non conduce mai ad un sistema trasformante che permetta di eliminare la γ, senza che qualche punto di essa dia origine a nuove curve eccezionali.

Comunque, una curva eccezionale γ, di 1.ª o di 2.ª specie, esistente sopra una superficie F permette di ampliare (nel modo anzidetto) un sistema regolare $|K|$ appartenente alla superficie, costruendo un nuovo sistema $|K_1|$ i cui caratteri (grado e genere effettivi) si esprimono semplicemente mediante quelli (n e π) di $|K|$ e mediante il numero m delle intersezioni di γ colle K. Infatti se si considerano i sistemi trasformati $|K^*|$, $|K^*_1|$ sopra una superficie F^*, trasformata di F, ove alla γ corrisponda un punto G^*, il sistema $|K^*|$ può considerarsi dedotto da $|K^*_1|$ coll'imposizione del punto G^* come base m-plo.

Quindi il grado e il genere di $|K_1|$ (o $|K^*_1|$) saranno dati da

$$n_1 = n + m^2,$$

$$\pi_1 = \pi + \frac{m(m-1)}{2},$$

e si avrà dunque

$$n_1 - 2\pi_1 = n - 2\pi + m.$$

Così l'esistenza di una curva eccezionale d'ordine m (>0) sopra una superficie F, di cui le sezioni iperpiane K formano un sistema (supposto regolare) di grado n e genere π, permette di trasformare la F in una superficie F_1 le cui sezioni iperpiane formano un nuovo sistema regolare, di grado n_1 e genere π_1, con

$$n_1 - 2\pi_1 > n - 2\pi.$$

Sicchè o si giunge, dopo un certo numero finito di trasformazioni, ad una superficie in corrispondenza con F che non possiede più curve eccezionali (e questo accade se F contiene soltanto un numero finito di curve eccezionali di 1.ª specie non secantisi fra loro), o si giunge ad una trasformata di F in cui la differenza $N - 2\Pi$ fra l'ordine N, cioè il grado del sistema delle curve sezioni iperpiane, e il doppio del genere Π delle nominate curve, può supporsi tanto grande quanto si vuole.

Conviene di enunciare il resultato ottenuto sotto forma negativa, nel modo seguente:

Se una superficie è tale che per ogni sistema lineare irriducibile di curve sopra di essa il grado non superi il doppio del genere diminuito di due ($N \leq 2\Pi - 2$), *la superficie possiede solo un numero finito di curve eccezionali; queste sono precisamente di 1.ª specie e non si segano fra loro. La superficie può quindi essere trasformata in un'altra priva affatto di curve eccezionali.*

L'importanza del resultato apparirà chiara quando avremo dimostrato che le superficie contenenti un sistema lineare per cui il grado supera il doppio del genere diminuito di 2, sono razionali o riferibili a rigate (n.° 16). Per ora è lecito soltanto di trarne la conclusione che « una superficie avente « il genere o qualcuno dei plurigeneri superiore a zero, si può trasformare « in guisa da non contenere curve eccezionali ».

Questo resultato era stato fino ad ora intravvisto o dimostrato soltanto con qualche restrizione superflua (*).

10. Quando sopra una superficie F si procede per aggiunzione a partire da un dato sistema lineare irriducibile, p. es. dal sistema delle sezioni iperpiane, i successivi sistemi aggiunti che si ottengono possono essere irriducibili o riducibili. Tra le cause che portano la riducibilità è da annoverare l'esistenza di curve eccezionali di 1.ª specie d'ordine convenientemente basso; infatti dopo un certo numero di aggiunzioni (assai grande in relazione al suo

(*) Enriques, *Introduzione...*, § 42.

ordine) una curva eccezionale di 1.ª specie diventa fondamentale pel sistema costruito, e proseguendo si distacca una, due, tre... volte dai sistemi successivamente aggiunti. A questo fatto va collegata la circostanza paradossale che per gli ultimi sistemi nominati il genere virtuale delle curve spezzate è inferiore al genere effettivo delle curve variabili che di quelle fan parte. Prima di analizzare più da vicino il fatto segnalato, stimiamo utile di darne un esempio.

Consideriamo perciò la superficie razionale F, appartenente ad un S_{47}, che viene rappresentata sul piano dal sistema delle curve C_{11}, d'ordine 11, aventi due punti quintupli A e B. Alla retta $A B$ corrisponde sopra F una retta p che è eccezionale di 1.ª specie. Le curve aggiunte alle sezioni di F sono rappresentate sul piano dalle C_8, d'ordine 8, aventi in A e B due punti quadrupli, onde pel loro sistema la retta p è fondamentale. Operando nuovamente per aggiunzione si ottiene su F un sistema (2.° aggiunto) che contiene p come parte fissa, rappresentato sul piano dal sistema delle quintiche C_5 composte della retta $A B$ e delle quartiche che hanno in A e B due punti doppi; il genere virtuale del nominato sistema sopra F è 0, il genere effettivo della parte variabile è 1.

Rendiamoci ora ragione in modo generale del fatto sopra avvertito. Sia γ una curva d'ordine m sopra una superficie F; ρ e ν denotino rispettivamente il genere e il grado virtuali di γ.

Designando con $|C|$ il sistema delle sezioni di F, con π il suo genere e con n il suo grado (ordine della superficie F), costruiamo il sistema

$$|(C+\gamma)'| = |C' + \gamma|$$

aggiunto a $|C+\gamma|$, e valutiamo il numero delle intersezioni di una curva generica di esso con una $C+\gamma$.

Essendo

$$\pi + \rho + m - 1$$

il genere di $|C+\gamma|$, il numero richiesto sarà

$$2\,\{\pi + \rho + m - 1\} - 2\,;$$

d'altra parte esso verrà dato anche da

$$(2\pi - 2) + m + x' + \nu,$$

ove, nel quadrinomio sopra scritto, il 1.° termine esprime quante sono le intersezioni di C' con C, il 2.° le intersezioni di γ con C, il 3.° le intersezioni di C' con γ, il 4.° le intersezioni di γ con se stessa.

Di qui ricaviamo la seguente espressione di x':

$$x' = m + 2\rho - 2 - \nu.$$

Operando successivamente per aggiunzione sopra $|C'|$, e costruendo così i successivi sistemi aggiunti $|C''|, \ldots, |C^i|$, otteniamo la formula

$$x^{(i)} = m + i(2\rho - 2) - i\nu, \tag{1}$$

la quale esprime il numero delle intersezioni delle C^i colla γ; ben inteso, il numero stesso ha un significato virtuale se la γ fa parte delle curve C^i. In questa ultima ipotesi, supposto per generalità che la γ entri un certo numero $h (\geqq 0)$ di volte come componente fissa nelle C^i, otterremo il numero (effettivo) delle intersezioni di una $C^i - h\gamma$ con γ, dalla formula

$$x_h^{(i)} = m + i(2\rho - 2) - (i + h)\nu. \tag{2}$$

Premesse queste formule, supponiamo che la γ sia una curva eccezionale di 1.ª specie; allora si ha

$$\rho = 0 \qquad \nu = -1,$$

e la formula (1) diventa

$$x^{(i)} = m - i.$$

Il numero $x^{(i)}$ è dunque negativo per $i > m$, supposto che esista (per un siffatto valore di i) il sistema $|C^i|$ aggiunto i-mo a $|C|$; e questo significa che la γ si stacca come parte fissa dalle curve C^i; precisamente si può dire in generale che essa si stacca $h = i - m$ volte $(h > 0)$, ed è fondamentale pel sistema delle curve residue, poichè dalla (2) si ricava

$$x_h^{(i)} = 0.$$

Valutando poi il genere virtuale di $|C^i|$, si vede che esso è inferiore di

$$\frac{h(h-1)}{2} = \frac{(i-m)(i-m-1)}{2}$$

unità rispetto al genere di $|C^i - h\gamma|$.

Vediamo così giustificata in un modo affatto generale l'osservazione ora fatta intorno allo staccarsi delle curve eccezionali di 1.ª specie dai sistemi successivi aggiunti a $|C|$.

Le formole scritte innanzi ci permettono ora d'invertire l'osservazione stessa nel modo seguente:

Se una curva γ di F si stacca un certo numero di volte, come parte

fissa, da tutte le curve C^i, aggiunte i-me al sistema C delle sezioni iperpiane di F (supposte le C^i ∞^1 almeno), e rimane fondamentale, cioè senza intersezioni, colle curve residue, la γ è una curva eccezionale di 1.ª specie d'ordine $< i$.

Poniamo infatti che la γ si stacchi un certo numero $h\,(> 0)$ di volte da $|C^i|$; l'ipotesi dell'enunciato porta l'eguaglianza

$$x_h^{(i)} = m + i\,(2\,\rho - 2) - (i + h)\,\nu = 0.$$

Ora perchè questa sia soddisfatta deve essere intanto $\nu \leq 0$. Infatti nell'ipotesi opposta $\nu > 0$ si ha

$$x_{h+1}^{(i)} < 0\,, \qquad x_{h+2}^{(i)} < 0\ldots,$$

dal che segue che il sistema $|C^i - (h+1)\,\gamma|$, ottenuto staccando da $|C^i - h\,\gamma|$ la curva fondamentale γ, consta di una sola curva costituita dalla γ contata un certo numero di volte, senza curve residue; quindi la dimensione di $|C^i|$ (o di $|C^i - h\,\gamma|$) vale

$$r^{(i)} = 1,$$

ossia il sistema $|C^i - h\,\gamma|$ è un fascio, del quale la γ contata una o più volte (sia p. e. s volte) costituisce tutta una curva. Ora la curva $s\,\gamma$ ha il grado $s^2\nu > 0$, e questo dunque deve essere anche il grado del fascio $|C^i - h\gamma|$; ma di qui risulta un assurdo perchè il grado del fascio stesso è pur dato da $s\,x_h^{(i)} = 0$, denotando $s\,x_h^{(i)}$ il numero delle intersezioni di $s\,\gamma$ con una curva di $|C^i - h\,\gamma|$.

Restano pertanto da considerare i casi

$$\nu = 0, \qquad \nu = -1, \qquad \nu \leq -2,$$

in corrispondenza ai quali, essendo ρ per sua natura non negativo (γ irriducibile), si deve avere $\rho = 0$, perchè possa essere $x_h^{(i)} = 0$.

Ma l'ultima ipotesi $\nu \leq -2$ si esclude subito, perchè si avrebbe

$$x_h^{(i)} \geq m + 2\,h > 0,$$

mentre si è supposto già $x_h^{(i)} = 0$.

Vedremo pure che è impossibile l'ipotesi $\nu = 0$.

A tal fine supponiamo che il sistema $|C^i - h\,\gamma|$, che per ipotesi non contiene γ come parte fissa, sia privo di componenti fisse, dalle quali (eventualmente) si potrebbe averlo spogliato. Detta $r^{(i)} \geq 1$ la dimensione del detto sistema, consideriamo le curve di esso che passano per un punto di γ, e

perciò si spezzano nella γ e in curve residue $C^i - (h+1)\gamma$. Queste ultime hanno $x_{h+1}^{(i)} = 0$ intersezioni con γ; ma ciò è impossibile tranne che nei seguenti due casi: *a*) se $|C^i - h\gamma|$ è un fascio lineare del quale una curva sia la γ; *b*) se $|C^i - h\gamma|$ è un fascio lineare, la cui curva generica si componga di più curve variabili in un fascio irrazionale del quale una curva è la γ. Ciò dipende dal fatto che se una curva generalmente irriducibile varia in un sistema algebrico (ad es. in un fascio), e per una posizione particolare si spezza, ad es. in due parti, le due parti devono avere almeno *una* intersezione comune; non *zero* come si era trovato considerando la γ e la $C^i - (h+1)\gamma$ (cfr. n.° 1). Ora, sia nella ipotesi *a*), che nella ipotesi *b*), la nostra superficie contiene un fascio di curve razionali, come la γ, e quindi può trasformarsi birazionalmente in una rigata (cfr. n.° 11). Sopra tale rigata la γ avrebbe come immagine una generatrice, sulla quale non si troverebbero punti base del sistema $|C|$ corrispondente al sistema delle sezioni iperpiane di F. Ora è facile persuadersi che procedendo per aggiunzione, sopra una rigata, a partire da un sistema lineare irriducibile, non potrà avvenire che da uno dei successivi sistemi aggiunti si distacchi, come parte fissa, una generatrice non contenente punti base del sistema. Con ciò resta dimostrato che l'ipotesi $\nu = 0$ è incompatibile colle nostre premesse.

La curva γ che si distacca (h volte) da $|C^i|$, restando fondamentale pel sistema residuo, ha dunque i caratteri $\rho = 0$, $\nu = -1$, ossia è una curva eccezionale di 1.ª specie.

Riassumendo, concludiamo:

Operando per aggiunzione ripetuta sopra il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di una superficie F, il sistema $|C^i|$, supposto ∞^1 almeno, a cui si perviene dopo i operazioni, potrà contenere delle parti fisse, contate un certo numero di volte, che sieno fondamentali pel sistema residuo; tali curve saranno le curve eccezionali di 1.ª specie, appartenenti ad F, che hanno l'ordine inferiore ad i, e queste soltanto.

Se dunque la superficie F non contiene curve eccezionali di 1.ª specie d'ordine minore di i, una componente fissa γ di $|C^i|$, che entri $h\,(>0)$ volte nella curva generica C^i, avrà $x_h^{(i)} > 0$ intersezioni colle curve residue $C^i - h\gamma$; ma in tal caso paragonando il genere $\pi^{(i)}$ di $|C^{(i)}|$ a quello $\pi_h^{(i)}$ di $|C^i - h\gamma|$, si troverà certo

$$\pi^{(i)} \geq \pi_h^{(i)}.$$

Infatti si ha

$$\pi^{(i)} = \pi_h^{(i)} + \rho_h + h\,x_h^{(i)} - 1,$$

dove

$$\rho_h = h(\rho - 1) + \nu \frac{h(h-1)}{2} + 1$$

esprime il genere di $h\gamma$ in funzione del genere $\rho \geqq 0$ di γ e del grado ν di γ. Ora la differenza

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = \rho_h + h\, x_h^{(i)} - 1$$

è certo $\geqq 0$ se $\nu > 0$, poichè allora si ha $\rho_h \geqq 0$, $x_h^{(i)} > 0$. Alla stessa conclusione si arriva se $\nu = 0$, giacchè in tal caso risulta

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = h \{ \rho + x_h^{(i)} - 1 \}$$

dove $h \geqq 1$, $\rho \geqq 0$, $x_h^{(i)} \geqq 1$.

Per esaminare finalmente l'ultima ipotesi $\nu < 0$, ossia $-\nu = \nu' > 0$, si trasformi la differenza $\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)}$, tenendo conto della espressione (2) di $x_h^{(i)}$; si troverà

$$\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} = h \{ (\rho - 1)(2i + 1) + m \} + \frac{h(h + 2i + 1)}{2} \nu',$$

risultato certo $\geqq 0$, tranne quando sia

$$\rho = 0, \quad m < i, \quad \nu' = 1;$$

ma queste soluzioni son da respingersi, perchè esse porterebbero alla conclusione esser γ (di grado $\nu = -\nu' = -1$ e genere $\rho = 0$) una curva eccezionale di prima specie avente l'ordine m inferiore ad i, contro l'ipotesi espressamente fatta. Rimane dunque dimostrato che in ogni caso è $\pi^{(i)} - \pi_h^{(i)} \geqq 0$; donde l'enunciato:

Se sopra una superficie F non esistono curve eccezionali di prima specie d'ordine inferiore ad i, il distaccarsi di eventuali componenti fisse dal sistema i-mo aggiunto (supposto almeno ∞^1) ottenuto partendo dalle sezioni iperpiane di F, non può mai aver l'effetto di rialzare il genere delle curve residue.

IV. Superficie sopra le quali il procedimento di aggiunzione si estingue: loro riferibilità a rigate.

11. Vogliamo qui anzitutto riepilogare, e completare in qualche punto, i principali resultati noti che si riferiscono alle condizioni di trasformabilità di una superficie in una rigata (razionale o no):

1) *Una superficie contenente un fascio di curve (irriducibili) razionali si può riferire ad una rigata, le cui generatrici corrispondono alle curve del fascio* (*).

2) *Una superficie contenente un fascio lineare di curve (irriducibili) ellittiche dotato di un punto base semplice o doppio, è razionale o riferibile ad una rigata ellittica* (**).

3) *Una superficie contenente un fascio lineare di curve (irriducibili) di genere due con uno o più punti base di moltiplicità* i_1, $i_2 \ldots$, *ove* $\Sigma i > 2$, *è razionale o riferibile ad una rigata di genere uno o due* (**).

4) *Una superficie contenente un sistema lineare di curve (irriducibili) di genere* $p > 2$ *e di dimensione* $r \geq 3p - 5$, *è razionale oppure riferibile ad una rigata.*

A questo resultato si arriva imponendo alle curve del nominato sistema lineare successivamente $p - 2$ punti doppi. Se per l'imposizione di un punto doppio le curve del sistema si spezzano, lo spezzamento ha luogo in una curva razionale passante per il punto doppio ed in una residua curva dello stesso genere delle primitive, quindi la superficie risulta riferibile ad una rigata; altrimenti si perviene ad un fascio lineare di curve di genere due (eventualmente composte con curve razionali o ellittiche costituenti pure un fascio, certo lineare perchè dotato di punti base semplici per la superficie), e si ricade in uno dei casi esaminati innanzi.

(*) Il teorema fu dimostrato, pel caso in cui il fascio sia di genere 0, dal sig. Noether, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen III (1870); e in modo completo da Enriques, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* Mathem. Annalen LII (1899).

(**) Castelnuovo ed Enriques, *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, n.° 5, Rendic. d. Circolo Mat. di Palermo, XIV 1900; cfr. una osservazione a piè di pagina nella Nota di Castelnuovo, *Le trasformazioni generatrici*... Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1901.

Non ci diffonderemo a spiegare ulteriormente i particolari di questa dimostrazione, rinviando il lettore alla Nota di ENRIQUES (*), *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari...*, ove il metodo stesso è applicato per dimostrare che « una superficie contenente un sistema lineare di curve di genere p e di dimensione $r \geqq 3p+5$ è razionale o riferibile ad una rigata di genere p ». Se qui si è ottenuto un resultato più espressivo, in cui l'ultima diseguaglianza è sostituita dalla $r \geqq 3p-5$, ciò dipende dal fatto che ci siamo potuti servire dei teoremi 2), 3), che son più espressivi di quelli di cui anni fa si poteva disporre.

12. Prendiamo ora a studiare le superficie F sopra cui il procedimento di aggiunzione, applicato successivamente al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane, ha termine dopo un numero finito di operazioni; e cominciamo dal dimostrare che il presentarsi di questo fatto (esaurimento del processo di aggiunzione) non dipende dalla natura proiettiva della superficie, cosicchè esso si ripete per ogni trasformata della F.

A tal fine basterà ricollegare l'esaurimento del processo di aggiunzione applicato a $|C|$, all'esistenza su F di un sistema lineare di curve di grado N e genere $\Pi > 0$, ove

$$N > 2\Pi - 2.$$

Avvertiamo intanto che, in base alla ipotesi fatta, la superficie F avrà tutti i plurigeneri nulli, ed in particolare il genere

$$p_g = 0;$$

quindi il genere aritmetico, che non può superare p_g, sarà inferiore od uguale a zero, ossia

$$p_a = -p \qquad \text{con} \qquad p \geqq 0.$$

Sieno ora $\pi, \pi', \dots, \pi^{(i)}$ i generi dei sistemi $|C|, |C'|, \dots, |C^i|$ successivi aggiunti a $|C|$, ciascuno dei quali è supposto ∞^1 almeno. Il genere π può supporsi grande quanto si vuole in confronto a p; ma se, come supporremo, $|C^i|$ è l'ultimo aggiunto di dimensione $\geqq 1$, il suo genere $\pi^{(i)}$ non potrà superare $p+1$, altrimenti si avrebbe un successivo aggiunto $|C^{i+1}|$, ∞^1 almeno.

Nella serie di numeri

$$\pi, \pi', \dots, \pi^{(i)}$$

(*) *Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino*, 1894.

si troveranno dunque due numeri consecutivi $\pi^{(s)}$, $\pi^{(s+1)}$ in ordine decrescente, tali cioè che

$$\pi^{(s)} > \pi^{(s+1)}.$$

Consideriamo allora il grado $n^{(s+1)}$ del corrispondente sistema $|C^{s+1}|$; avremo (n.° 2)

$$n^{(s+1)} = \pi^{(s)} + \pi^{(s+1)} - 2 > 2\,\pi^{(s+1)} - 2.$$

Il sistema $|C^{(s+1)}|$ è dunque tale che in esso il grado supera il doppio del genere diminuito di 2.

Si può invertire il resultato ottenuto mostrando che « se ad F appartiene un sistema lineare $|K|$ di genere Π e grado N, ove

$$N > 2\,\Pi - 2,$$

il processo di aggiunzione applicato al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F si estingue dopo un numero finito di operazioni ».

A tal fine sommiamo a $|C|$ un multiplo, d'ordine s abbastanza elevato, di $|K|$, in guisa da ottenere che il grado n_s e il genere π_s del sistema somma $|C_s| = |C + s\,K|$ verifichino la disuguaglianza analoga a quella supposta per $|K|$, cioè $n_s > 2\,\pi_s - 2$. Questo resultato si può sempre ottenere; infatti calcolando colle note formole i caratteri di $|s\,K|$ e poi di $|C + s\,K|$, si trova la relazione

$$n_s - (2\,\pi_s - 2) = n - (2\,\pi - 2) + s\,\{N - (2\,\Pi - 2)\};$$

ed il secondo membro è certo positivo quando s sia sufficientemente elevato.

Ora le curve C'_s, aggiunte a $|C_s|$, segheranno le C_s in $2\,\pi_s - 2$ punti; le C''_s, seconde aggiunte, segheranno le C_s in

$$2\,\pi_s - 2 - \{n_s - (2\,\pi_s - 2)\} < 2\,\pi_s - 2$$

punti; le C'''_s segheranno le C_s in un numero ancora minore,

$$2\,\pi_s - 2 - 2\,\{n_s - (2\,\pi_s - 2)\},$$

di punti, ecc.

Pertanto (visto che quei numeri di intersezioni non possono divenir negativi) si conclude che dopo un certo numero di operazioni l'aggiunzione applicata a $|C_s|$ dovrà per forza estinguersi. Prima di quel punto si estinguerà dunque anche il processo di aggiunzione applicato a $|C|$, avendosi

$$|C'_s| = |C' + s\,K|,$$

$$|C''_s| = |C'' + s\,K|, \text{ ecc.}$$

Resta così giustificata l'affermazione che:

« L'estinguersi del procedimento di aggiunzione applicato al sistema « delle sezioni iperpiane di F è un fatto che ha carattere invariantivo, fatto il « quale si accorda sempre coll'esistenza sopra F di qualche sistema lineare per « cui il grado supera il doppio del genere diminuito di 2. »

Ciò premesso, sia F una superficie su cui il processo d'aggiunzione applicato al sistema delle sezioni iperpiane C si estingue dopo un numero finito d'operazioni.

Possiamo supporre che la F sia priva di singolarità, inoltre che le sue sezioni iperpiane C compongano un sistema lineare regolare, essendo queste restrizioni d'indole proiettiva soltanto. Designamo (come innanzi) con C', C'', ..., C^i le curve dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$, fermandoci all'ultimo sistema $|C^i|$, ∞^1 almeno.

Le curve eccezionali di 1.ª specie, d'ordine $< i$, che appartengono ad F, si distaccano, come parti fisse, da $|C^i|$, restando fondamentali pel sistema residuo; pertanto esse non si segheranno fra loro, e quindi si potrà trasformare la superficie in modo che esse vengano eliminate, cioè mutate in punti, senza che nessun punto (fondamentale) di F dia origine a nuove curve eccezionali. Il sistema trasformante si ottiene sommando a $|C|$ ciascuna delle nominate curve fondamentali contata tante volte quant'è l'ordine della curva stessa; a tale sistema è dunque applicabile l'aggiunzione i volte, come a $|C|$.

Si conclude così che, senza introdurre alcuna restrizione essenziale, si può supporre la superficie F *convenientemente preparata*, in guisa da non contenere curve eccezionali di 1.ª specie d'ordine inferiore ad i.

In tale ipotesi avremo (n.° 10) che « i sistemi $|C'|$, $|C''|$, ..., $|C^i|$ suc« cessivi aggiunti al sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F, potranno es« sere irriducibili o riducibili; ma, in quest'ultimo caso, spogliando ciascuno « dei nominati sistemi $|C^s|$ delle sue componenti fisse, si otterrà un sistema « il cui genere non sarà superiore al genere $\pi^{(s)}$ di $|C^s|$ ».

13. Ciò posto, studiamo più da vicino la superficie F, convenientemente preparata, sopra cui il procedimento di aggiunzione applicato alle sezioni iperpiane $|C|$, termina dopo i operazioni, arrestandosi all'ultimo sistema aggiunto $|C^i|$, ∞^1 almeno.

Come innanzi designamo con

$$\pi,\ \pi',\ \pi'',\ldots,\ \pi^{(i)}$$

i generi rispettivi di $|C|$, $|C'|$, $|C''|$,..., $|C^i|$, e denotiamo con s il più

piccolo indice ($\leqq i$) per cui si trova

$$\pi^{(s)} < \pi^{(s-1)}.$$

Distinguiamo quindi due casi, secondochè il carattere ω della superficie F vale

$$\omega \leqq 1,$$

oppure

$$\omega > 1.$$

1.° caso: $\omega \leqq 1$.

In questo caso, in virtù dell'eguaglianza (n.° 5)

$$\pi - \pi' - (\pi' - \pi'') = \omega - 1,$$

sarà

$$\pi - \pi' \leqq \pi' - \pi'' \leqq \pi'' - \pi''' \ldots,$$

sicchè, dall'indice $s-1$ in poi, i successivi generi

$$\pi^{(s-1)}, \ \pi^{(s)}, \ \pi^{(s+1)}, \ldots, \ \pi^{(i)}$$

andranno sempre decrescendo, mentre le differenze positive

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)}, \ \pi^{(s)} - \pi^{(s+1)}, \ldots$$

andranno generalmente crescendo, o almeno non decresceranno.

Indichiamo con $D > 0$ la prima di queste differenze; poniamo cioè

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)} = D,$$

relazione che equivale all'altra

$$n^{(s)} - (2\pi^{(s)} - 2) = D,$$

dove $n^{(s)} = \pi^{(s-1)} + \pi^{(s)} - 2$ è il grado di $|C^s|$. Allora l'ultimo sistema aggiunto $|C^i|$ (∞^1 almeno) della nostra serie, del quale il genere

$$\pi^{(i)} \leqq p + 1,$$

avrà una dimensione

$$r \geqq \pi^{(i-1)} - p - 1 \geqq D + \pi^{(i)} - p - 1,$$

Ora qui può supporsi che D sia grande quanto si vuole in confronto a p, ad es.

$$D \geqq 3(p+1).$$

Se così non fosse, basterebbe sostituire al sistema di partenza $|C|$ un suo multiplo $|hC|$ (e quindi alla superficie F, di cui le C sono sezioni iper-

piane, una sua trasformata F_h, avente come sezioni le curve di $|hC|$, la quale può supporsi convenientemente preparata). Infatti partendo dal sistema $|hC|$ troveremo nella serie dei successivi aggiunti, e precisamente al posto d'ordine sh, il sistema $|hC^s|$, di grado $N^{(sh)}$ e genere $\Pi^{(sh)}$, dove

$$N^{(sh)} - (2\,\Pi^{(sh)} - 2) = h\,\{ n^{(s)} - (2\,\pi^{(s)} - 2) \},$$

sicchè avremo

$$D_h = \Pi^{(sh-1)} - \Pi^{(sh)} = N^{(sh)} - (2\,\Pi^{(sh)} - 2) = h\,D;$$

e basterà prendere h sufficientemente grande, per avere D_h grande quanto si vuole.

Supposto dunque di aver già realizzata la disuguaglianza sopra scritta

$$D \geqq 3\,(p+1),$$

fissiamo la nostra attenzione sopra il sistema $|C^i|$ che si presenta ultimo nella serie degli aggiunti

$$|C|,\ |C'|,\ |C''|, \ldots, |C^i|.$$

Staccando da questo sistema le eventuali componenti fisse, otterremo (data la *conveniente preparazione* di F) un sistema lineare di genere

$$\rho \leqq \pi^{(i)} \leqq p+1,$$

e di dimensione

$$r \geqq D + \pi^{(i)} - p - 1 \geqq 3\,\rho,$$

come segue subito dalle disuguaglianze precedenti relative a ρ e a D. Ora il detto sistema lineare potrà essere: *a*) irriducibile, oppure *b*) riducibile, cioè composto colle curve γ d'un fascio.

Nell'ipotesi *a*), la presenza del nominato sistema prova subito, in virtù dei teoremi del n.° 11 (*), che *la superficie F è riferibile ad una rigata di genere ρ* (dove trattandosi di una superficie di genere numerico $-p$, dovrà risultare $\rho = p$).

Nell'ipotesi *b*), designando con θ il genere delle curve γ del fascio sopra nominato, e tenendo conto del fatto che in ciascuna delle ∞^r curve C^i en-

(*) Basterebbe anzi per ciò che fosse $r \geqq 3\rho - 5$; se qui si parte da una disuguaglianza meno espressiva, è in vista di ciò che segue, come pure per tener conto dei casi $\rho = 1, 2$.

trano almeno r componenti γ, avremo

$$p+1 \geqq \rho \geqq r(\rho-1)+1\,;$$

e poichè (come innanzi)

$$r \geqq 3\rho,$$

ne consegue

$$\theta \leqq 1.$$

Vediamo se può essere $\theta=1$, ipotesi che porta $\rho \geqq 1$, e quindi $\pi^{(i)} \geqq 1$. Consideriamo a tal fine il sistema $|C^{i-1}|$, di cui $|C^i|$ è l'aggiunto; il valore $\pi^{(i-1)}$ del suo genere soddisferà alla diseguaglianza

$$\pi^{(i-1)} \geqq D+\pi^{(i)} \geqq D+1.$$

Ponendo dunque

$$\pi^{(i-1)} = D+1+x \quad \text{con} \quad x \geqq 0,$$

saranno $2(D+x)$ i punti segati da una C^i sopra una C^{i-1}. Ma poichè la C^i si compone (a meno di parti fisse) di almeno r curve γ, ciascuna delle quali sega la C^i in un certo numero t di punti, si dovrà avere

$$2(D+x) \geqq r\,t.$$

D'altronde la dimensione r di $|C^i|$ è $\geqq \pi^{(i-1)}-p-1 \geqq D+x-p$. Sostituendo si trova

$$(D+x)(t-2) \leqq t\,p,$$

e questa relazione, se si bada che $D > 3p$, porta di conseguenza

$$t=2.$$

Dunque ogni γ sarebbe segata da una C^{i-1} in due punti. Ma allora, per la formola (1) del n.° 10, la γ (curva ellittica di grado 0) sarebbe segata in due punti da una $C^{i-2}, \ldots$ e finalmente da una C generica (sezione di F), il che è assurdo, visto che allora la γ generica sarebbe una conica e quindi razionale.

Resta dunque possibile soltanto l'ipotesi $\theta=0$, la quale dice che « le curve γ del fascio suindicato sono razionali ». Tanto basta per concludere che anche in questo caso, e quindi *ogniqualvolta l'invariante* ω *della superficie* F *è* $\leqq 1$, *la superficie stessa è riferibile ad una rigata* (n.° 11, 1).

14. *Secondo caso* $\omega > 1$.

È utile premettere qualche osservazione sulla nostra superficie F, sopra cui il procedimento di aggiunzione si estingue, e che ha i caratteri $\omega > 1$, $p_a = -p \leqq 0$.

Osserviamo anzitutto che se $|C|$ è un sistema lineare, privo di punti base su F, avente il grado n ed il genere $\pi \geq p+1$, tra i suoi caratteri ed il genere π' del sistema aggiunto sussistono le disuguaglianze

$$n > 2\pi - 2, \qquad \pi > \pi'.$$

Per dimostrare la prima basta partire dalla definizione di ω,

$$n - (2\pi - 2) - (\pi - \pi') = \omega - 1 > 0,$$

notando che se fosse $n \leq 2\pi - 2$, dovrebbe risultare $\pi' > \pi$, e quindi $\pi' > p+1$. Siccome d'altronde il grado del sistema aggiunto $|C'|$ vale

$$n' = \pi + \pi' - 2 < 2\pi' - 2,$$

seguirebbe, sempre nella stessa ipotesi, l'esistenza del secondo aggiunto $|C''|$ di genere $\pi'' > \pi' > \pi$. E così si continuerebbe all'infinito, mentre per ipotesi il processo di aggiunzione deve estinguersi sopra F. Risulta dunque dimostrata la prima disuguaglianza.

Quanto alla seconda si osservi che dal negarla, dal porre cioè $\pi' \geq \pi \geq p+1$, segue (applicando la disuguaglianza già dimostrata al sistema $|C'|$) $n' > 2\pi' - 2$, ossia (sostituendo a n' il valore sopra scritto) $\pi > \pi'$, contro la ipotesi ora ammessa $\pi' \geq \pi$.

E qui si noti incidentalmente che le due disuguaglianze (insieme al ragionamento che ha servito a giustificarle) sussistono pure per le superficie con $\omega = 1$, purchè la ipotesi $\pi \geq p+1$ si sostituisca ora coll'altra $\pi > p+1$, e ciò per evitare un caso di eccezione ($p = 0$, $\pi = 1$) che altrimenti si presenterebbe.

Una seconda osservazione sulla nostra superficie $F(\omega > 1)$ è che essa non può possedere un fascio irrazionale di curve (serie irrazionale di cui una sola curva passa per un punto generico della superficie).

Ammesso infatti che la nostra superficie, di cui il genere geometrico p_g è certo nullo, possegga un fascio irrazionale, risulta anzitutto che il genere aritmetico $p_a = -p$ dovrà esser inferiore a 0 ($p > 0$), poichè una superficie regolare ($p_g = p_a$) non possiede fasci irrazionali (*).

Il fascio d'altra parte non potrà comporsi di curve razionali, perchè, se così fosse, la superficie potrebbe trasformarsi in una rigata, mentre, come vedremo tra poco direttamente (n.° 21), una rigata ha il carattere $\omega \leq 1$, contro

(*) Castelnuovo, *Alcuni risultati* . . ., n.° 10. Memorie della Società italiana d. Scienze (dei XL), (serie III), tom. X, (1896).

l'ipotesi. Posto adunque che sia $\rho > 0$ il genere di una curva generica del fascio, e ρ' il genere del fascio, avremo (applicando la formola di Zeuthen-Segre estesa ai fasci irrazionali, n.° 6, Oss.) che l'invariante relativo I della superficie sarà espresso da

$$I = \Delta + 4(\rho - 1)(\rho' - 1) - 4,$$

dove $\Delta \geqq 0$ è il numero delle curve del fascio dotate di punto doppio. Dunque $I \geqq -4$; e per la relazione tra I, ω e $p_a = -p$ (n.° 6) si deduce

$$\omega \leqq -12p + 13,$$

la quale contraddice alla ipotesi $\omega > 1$ unita all'osservazione secondo cui deve essere $p \geqq 1$.

Premesse queste osservazioni, ritorniamo alla nostra superficie F di genere aritmetico $-p \leqq 0$, avente $\omega > 1$, sopra la quale il processo di aggiunzione si estingue. Partendo dal sistema $|C|$ delle sezioni piane, formiamone i successivi aggiunti, fino all'ultimo aggiunto $|C^i|$, almeno ∞^1. Designando, secondo il solito, con $\pi^{(i)}$ il genere di $|C^i|$, avremo

$$\pi^{(i)} \leqq p + 1.$$

Ora il sistema $|C^i|$ potrebbe esser riducibile; prescindendo in tal caso dalle sue componenti fisse, otterremo (n.° 10) o un sistema lineare irriducibile di genere

$$\rho \leqq \pi^{(i)} \leqq p + 1,$$

oppure un sistema composto colle curve γ di un fascio lineare, delle quali il genere virtuale designeremo ancora con ρ; ora qui, fatta astrazione dalla ipotesi $\rho = 0$ che condurrebbe senz'altro a conchiudere la razionalità di F, si avrà ancora

$$\rho \leqq \pi^{(i)} \leqq p + 1.$$

In ogni caso avremo dunque su F un sistema lineare irriducibile $|K|$, virtualmente privo di punti base, di genere virtuale

$$\rho \leqq p + 1$$

e di genere effettivo $\leqq \rho$.

Indichiamo con r la dimensione di $|K|$, ed applichiamo a $|K|$ la disuguaglianza del n.° 7; troveremo

$$5\rho + r \geqq 11p + \omega - 8,$$

ossia, poichè $\omega \geqq 2$ e $\rho \leqq p+1$, avremo

$$r \geqq 6p - 11.$$

Questa disuguaglianza ci conduce subito al risultato che desideriamo, *quando si faccia la ipotesi* $p \geqq 3$ (*). Infatti allora l'ultima formola ci dà

$$r \geqq 3p - 2 \geqq 7,$$

donde segue (ricordando la $\rho \leqq p+1$)

$$r \geqq 3\rho - 5.$$

Si conclude (n.° 11), tanto se $\rho = 0, 1, 2$, quanto se $\rho > 2$, che *la superficie F è riferibile ad una rigata.*

Restano dunque da trattare *le ipotesi* $p = 0, 1, 2$, delle quali la terza specialmente darebbe luogo ad una discussione alquanto minuziosa, se volessimo seguire una via analoga a quella tenuta per $p \geqq 3$. Si arriva invece rapidamente al risultato per la via completamente diversa che qui indichiamo.

Sia $|C|$ il sistema delle sezioni piane della superficie F, od un multiplo di quello abbastanza elevato per far sì che il genere di $|C|$ sia $\pi \geqq p+1$, e che inoltre il sistema aggiunto $|C'|$ sia irriducibile. Allora, detto π' il genere di $|C'|$, risulterà intanto, per una osservazione precedente, $\pi > \pi'$. Ciò premesso, formiamo il sistema $|K^{-2}| = |2C - 2C'|$. Noi abbiamo già calcolato i caratteri del detto sistema (n.° 5, formole (1)', (2)'), ed abbiamo trovato che, indicandone con R, Π, N la dimensione, il genere virtuale ed il grado, si ha (tenuto conto della ipotesi $p \leqq 2$)

$$R \geqq 3\omega - 3 - p \geqq 3\omega - 5$$
$$\Pi = \omega, \quad N = 4(\omega - 1).$$

Ora dal fatto che esista su F un sistema di genere $\omega \geqq 2$ e dimensione $R \geqq 3\omega - 5$, si conclude senz'altro (n.° 11, 4)) che F è riferibile birazionalmente ad una rigata; e ciò anche nella ipotesi estrema $\omega = 2$, in cui il sistema può ridursi ad un fascio, giacchè il fascio o possiede $N = 4$ punti base semplici, ed allora si può applicare la proposizione 3) del n.° 11, o possiede un punto base (accidentale) doppio, ed allora la curva generica del fascio

(*) È qui da notarsi che la discussione del caso $\omega > 1$, $p > 0$ procede in certo modo per assurdo; giacchè la discussione stessa, unita alla osservazione (n.° 21) che per una rigata si ha $\omega \leqq 1$, mostra che la ipotesi $\omega > 1$ conduce solo alle superficie razionali, per le quali d'altronde è $p = 0$. Ma non par facile dedurre direttamente la $p = 0$ dalla $\omega > 1$.

ha il genere effettivo $\omega - 1 = 1$, e si può ricorrere alla proposizione 2) del n.° 11. Dunque in ogni caso *la nostra superficie F con $\omega > 1$ è riferibile ad una rigata.*

15. Riassumendo il resultato della discussione precedente (n.i 13, 14), arriviamo infine al teorema fondamentale:

Se sopra una superficie il procedimento di aggiunzione applicato ad un qualsiasi sistema lineare ha termine dopo un numero finito di operazioni, la superficie può trasformarsi birazionalmente in una rigata (razionale o no).

V. La trasformabilità di una superficie in una rigata desunta dall'esistenza di certi sistemi di curve sopra di essa.

16. In forza di ciò che si è detto al n.° 12, il resultato ultimamente ottenuto si può enunciare dicendo:

Una superficie contenente un sistema lineare di curve di dimensione ≥ 0, *di genere* $\pi > 0$, *e di grado* $n > 2\pi - 2$, *è riferibile ad una rigata.*

Il resultato vale sia che si tratti di un sistema riducibile o irriducibile, ed in questo secondo caso si possono indifferentemente considerare i caratteri effettivi del sistema (in rispondenza all'ipotesi che il sistema stesso abbia dei punti base assegnati), o i caratteri virtuali (in rispondenza all'ipotesi che gli eventuali punti base del sistema si riguardino come virtualmente inesistenti); ma il caso in cui si considerano i caratteri virtuali è sempre più espressivo.

Per riconoscere l'ampiezza del resultato ottenuto basterà considerare dei valori particolari del genere π.

Per $\pi = 1$ ritroviamo, maggiormente esteso, il resultato 2) riportato al n.° 11 concernente le superficie con un fascio lineare di curve ellittiche; per $\pi = 2$ troviamo il resultato 3) del n.° 11 sulle superficie con un fascio lineare di curve di genere due.

Per $\pi = 3$ si ottengono già dei resultati interamente nuovi; in particolare lo studio delle superficie a sezioni di genere 3 fa un progresso essenziale mediante il teorema:

Una superficie, d'ordine superiore a 4, *a sezioni di genere* 3, *è razionale, o rigata, o trasformabile in una rigata di genere* 1 o 2.

E per esaurire completamente il detto studio (poichè le superficie razionali a sezioni di genere 3 sono già note) basterà classificare i sistemi lineari di curve di genere 3 appartenenti ad una rigata ellittica o di genere due.

17. Dal teorema del precedente numero discende l'importante corollario:

Se una superficie contiene una serie continua (algebrica) ∞^1 di curve razionali, o questa serie è tale che ogni punto della superficie appartiene ad una curva di essa, cioè la detta serie costituisce un fascio di un certo genere $p \geqq 0$, ed allora la superficie è trasformabile in una rigata di genere p; o la serie è tale che per ogni punto passano più curve di essa, ed allora la superficie è razionale.

La prima parte dell'enunciato essendo già nota (cfr. n.° 11, 1)), basterà stabilire la seconda.

Designando con C le curve razionali della serie, avremo per un teorema del sig. HUMBERT (*), (la superficie essendo priva d'integrali di differenziali totali di 1.ª specie) che le C saranno contenute totalmente in un sistema lineare; il genere π di questo sistema verrà dato dal numero dei punti doppi variabili delle C, e il grado n di esso dal numero delle intersezioni variabili di due C.

Pel nostro scopo occorre provare che

$$n > 2\pi - 2.$$

A tal fine stabiliamo una corrispondenza razionale tra la superficie F ed una superficie F' possedente un fascio di curve razionali C'; ciò si ottiene rappresentando birazionalmente ciascuna C su ciascuna C', e facendo quindi corrispondere ad ogni punto di F (pel quale passerà un certo numero $\nu > 1$ di curve C) un gruppo di ν punti sopra F'. Si può anche supporre che la F' sia una rigata e le C' generatrici di essa, poichè in caso opposto basterebbe assoggettare F' ad una conveniente trasformazione birazionale (n.° 11, 1)).

Così avendo operato, ai punti della F corrispondono sulla rigata F' i gruppi di ν punti di una *involuzione* I_ν, cioè di una serie di gruppi cosiffatta che ogni punto della superficie appartenga ad *un* gruppo della serie. È ora facile stabilire qual significato abbiano per la detta involuzione I_ν di F' i caratteri π e n relativi al sistema delle curve C di F.

Il genere π (numero dei punti doppi variabili appartenenti ad una C) viene dato dal numero dei gruppi I_ν che hanno due punti sopra una data generatrice di F'; il grado n (numero dei punti variabili comuni a due C) è invece il numero dei gruppi di I_ν aventi un punto sopra una data gene-

(*) *Sur quelques points de la théorie...* Journal de Mathématiques (4.me s.e), X (1894), pag. 195.

ratrice ed un secondo punto sopra una seconda generatrice pur data. Ora è chiaro che se le due ultime generatrici vengono a coincidere in una, gli n gruppi di I_ν ora nominati, divengono i π gruppi di I_ν che hanno due punti su quella generatrice, più un certo numero $\delta \geqq 0$ di gruppi di I_ν aventi un punto sulla detta generatrice ed un secondo punto infinitamente vicino al primo.

Di qui si ricava $n = 2\pi + \delta$, ossia $n \geqq 2\pi$; donde si trae che la superficie F è razionale o riferibile ad una rigata irrazionale; ma la seconda alternativa resta esclusa per l'esistenza su F di una serie di curve razionali non formanti un fascio.

All'enunciato sopra scritto possiamo dare anche le seguenti forme equivalenti:

Ogni involuzione sopra una rigata è razionale o riferibile ad una nuova rigata, il cui genere non può superare quello della data.

In particolare si ha il resultato noto:

Le involuzioni piane sono razionali (*).

Sotto forma algebrica il precedente resultato generale si esprime dicendo:

Se l'equazione algebrica

$$f(x\,y\,z) = 0$$

si può risolvere ponendo x, y, z funzioni razionali di due parametri X, Y, legati da una relazione algebrica, e di un parametro t:

$$x = x(X\,Y\,t), \quad y = y(X\,Y\,t), \quad z = z(X\,Y\,t),$$
$$\varphi(X\,Y) = 0,$$

e se le scritte formule di risoluzione non sono razionalmente invertibili, si possono introdurre nuovi parametri

$$X_1 = X_1(X\,Y), \quad Y_1 = Y_1(X\,Y), \quad t_1 = t_1(t)$$

funzioni razionali dei precedenti, per modo che le x, y, z si esprimano per X_1, Y_1, t_1 in modo razionale invertibile, oppure si può risolvere la $f(x\,y\,z) = 0$ ponendo x, y, z funzioni razionali di due nuovi parametri indipendenti u, v, che sieno alla lor volta razionalmente esprimibili per x, y, z.

18. Ricordando ciò che si è trovato al n.° 9, il teorema generale del n.° 16 ci permette anche di enunciare il corollario:

(*) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* Mathem. Annalen, XLIV (1893).

Una superficie contenente infinite curve eccezionali è riferibile ad una rigata (razionale o no).

Una superficie contenente una curva eccezionale di 2.ª specie è riferibile ad una rigata (razionale o no).

Una superficie, non riferibile ad una rigata, si può trasformare in guisa da non contenere alcuna curva eccezionale.

Quest'ultimo resultato è soprattutto importante pel fatto che, rispondendo in modo preciso alle previsioni, solo in parte giustificate, fatte intorno all'argomento, permette ormai di ritenere eliminata dallo studio delle superficie la grave difficoltà inerente alle curve eccezionali.

19. Il resultato del n.º 16 permette anche di colmare una lacuna tutt'ora esistente nello studio delle superficie con una serie continua di trasformazioni birazionali in sè stesse.

Le superficie che ammettono una serie continua di trasformazioni birazionali, formanti un *gruppo* (nel senso di Lie), sono state studiate anzitutto dal sig. Picard (*), che, tenendo di mira il caso più interessante del gruppo permutabile, giunse alla scoperta delle superficie iperellittiche, oggetto di ulteriori studi notevolissimi del sig. Humbert (**). Le ricerche del sig. Picard, per quanto concerne le superficie dotate di un gruppo di trasformazioni non permutabili, furono in qualche punto proseguite da Castelnuovo ed Enriques (***) (i quali dettero l'estensione alle superficie del teorema di Schwartz per le curve, considerando il caso di gruppi ∞^2 o più ampi), ed infine furono, si può dire, condotte a termine dalla profonda analisi del sig. Painlevé (****).

Ma tutte queste ricerche lasciano da parte le superficie dotate di una serie continua di trasformazioni non appartenenti ad un gruppo (possedente un numero finito di dimensioni); e la domanda, formulata dai sig. Picard e Painlevé, se esistano superficie siffatte oltre alle superficie razionali e alle rigate, rimaneva tuttora senza risposta.

I resultati di questo lavoro permettono di rispondere in modo negativo alla domanda suddetta.

(*) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques*, Journal de Mathématiques (4.me s.e) V (1889).

(**) Journal de Mathématiques (4.me s.e) IX (1893).

(***) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc., Juillet 1895.

(****) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, pag. 265 e seg. (Paris, Hermann, 1897).

Si abbia infatti una superficie F dotata di una serie continua ∞^1 di trasformazioni birazionali in sè stessa. Moltiplicando ad r ad r le trasformazioni della serie, e facendo poi crescere il numero r, due casi potranno presentarsi; o si otterrà una serie di trasformazioni, la cui dimensione andrà sempre crescendo con r, e sarà anzi r stesso; oppure si giungerà alla fine ad un gruppo dipendente da un numero finito di parametri, nel qual gruppo la serie data sarà contenuta. Noi dobbiamo naturalmente occuparci del primo caso. Applichiamo le ∞^r trasformazioni nominate al sistema lineare $|C|$, di genere π e grado n, formato colle sezioni (piane o iperpiane) di F. Otterremo una serie continua di curve C_r di genere π, la cui dimensione andrà crescendo senza limite col crescer di r. Altrettanto accadrà dunque del numero N_r delle intersezioni di due C_r generiche, giacchè tutte le C_r segano sopra una di queste una serie (lineare o no) di gruppi, la cui dimensione è la dimensione della serie delle C_r o ne differisce in meno per una unità.

Consideriamo d'altra parte, tra le nominate C_r, quelle curve $\overline{C_r}$ che provengono dalle sezioni C di F per effetto di *una* determinata tra le ∞^r trasformazioni. Quelle $\overline{C_r}$ formano evidentemente un sistema lineare $|\overline{C_r}|$, di cui il genere e il grado (effettivi) coincidono col genere π e il grado n di $|C|$. Però il sistema $|\overline{C_r}|$ avrà generalmente un certo numero σ di punti base di molteplicità $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$; tenendo conto delle $\sum\limits_1^\sigma h^2$ intersezioni assorbite da questi, si avrà il grado virtuale di $|\overline{C_r}|$ che dovrà coincidere col numero N_r delle intersezioni di due C_r generiche; dunque

$$N_r = n + \sum_1^\sigma h^2.$$

Similmente, detto Π_r il genere virtuale di $|\overline{C_r}|$, si avrà

$$\Pi_r = \pi + \frac{1}{2} \sum_1^\sigma h\,(h-1).$$

Ora dalle due relazioni si ricava

$$N_r - 2\,\Pi_r = n - 2\,\pi + \sum_1^\sigma h.$$

Ma poichè, col crescere di r, il numero N_r, e quindi $\sum\limits_1^\sigma h^2$, può rendersi grande quanto si vuole, si potrà anche rendere grande ad arbitrio

$\sum_1^\sigma h \geq \sqrt{\sum_1^\sigma h^2}$, e per conseguenza si potrà rendere positiva la differenza $N_r - 2\Pi_r$. Tanto basta per concludere (n.° 18) che

Una superficie la quale ammetta una serie continua di trasformazioni birazionali non appartenenti ad un gruppo (d'ordine finito), è razionale o riferibile ad una rigata di genere $p>0$.

Nel piano e sulle superficie rigate di genere $p>0$ si costruiscono agevolmente serie di trasformazioni non appartenenti ad un gruppo; queste, come è chiaro, operano intransitivamente sui punti della superficie quando sia $p>1$.

VI. Il genere lineare $p^{(1)}$ di una superficie e la sua importanza nel decidere se la superficie sia trasformabile in una rigata.

20. Nel n.° 5, definendo l'invariante relativo ω di una superficie F, abbiamo osservato che esso diviene un invariante assoluto $p^{(1)}$ quando la superficie F sia priva di curve eccezionali. Se al contrario la superficie F possiede un certo numero *finito* $e>0$ di curve eccezionali, nel qual caso essa può trasformarsi in una superficie priva di curve eccezionali, il valore dell'invariante assoluto $p^{(1)}$ non coincide col valore di ω calcolato sulla F, ma ne differisce di e unità; e si ha precisamente

$$p^{(1)} = \omega + e.$$

L'invariante assoluto $p^{(1)}$ così definito prende il nome di *genere lineare* (o *Curvengeschlecht*) della superficie F (*). La definizione è in perfetto accordo con quella data dal sig. Noether, nel caso in cui la superficie abbia il genere geometrico $p_g>0$, giacchè allora $p^{(1)}$ è precisamente il *genere (virtuale) delle curve canoniche di F*, mentre $p^{(1)}-1$ è il grado (virtuale) del sistema canonico. Ma la definizione sopra riferita comprende altri casi che sfuggono alla definizione di Noether; precisamente quella si estende ad ogni superficie che non sia trasformabile in una rigata (cfr. n.° 18). Come essa possa estendersi anche alla classe delle rigate si vedrà tra poco.

Osserviamo per ora che sulle superficie dotate di un numero finito (zero incluso) di curve eccezionali, il genere lineare $p^{(1)}$ è sempre ≥ 1. Ciò segue

(*) Cfr. Enriques, *Introduzione ...*, § 41.

dal fatto che, ammesso di aver trasformato la nostra superficie in una F priva di curve eccezionali, e detti π, π', π''... i generi del sistema $|C|$ delle sezioni piane di F e dei successivi aggiunti $|C'|$, $|C''|$..., si ha, per definizione, l'uguaglianza

$$(\pi - \pi') - (\pi' - \pi'') = p^{(1)} - 1,$$

e sussistono pure tutte le analoghe che si ottengono aumentando di una unità per volta gli apici di tutte le π. Ora se fosse $p^{(1)} < 1$, $p^{(1)} - 1 < 0$, le differenze $\pi - \pi'$, $\pi' - \pi''$, $\pi'' - \pi'''$... formerebbero una serie di valori crescenti (cfr. n.° 13), e quindi da un certo punto in poi i generi dei successivi aggiunti andrebbero decrescendo; ma allora (tenuto conto del n.° 10) l'aggiunzione si dovrebbe esaurire dopo un numero finito di operazioni, il che non può certo accadere sulla superficie F.

Osserviamo inoltre che sulle superficie di cui stiamo ora parlando, il carattere $p^{(1)} \geqq 1$ permette di fissare un limite inferiore al valore dei singoli plurigeneri, stabilendo così (tranne in un caso) l'esistenza dei sistemi pluricanonici da un certo punto in poi, e dandone inoltre i caratteri. Infatti, detto $|C|$ il sistema delle sezioni piane della nostra superficie F priva di curve eccezionali, e $|C'|$ il sistema aggiunto, sappiamo che il sistema i-canonico $|K^i|$ di F è dato dalla identità $|K^i| = |iC' - iC|$. Se adunque indichiamo con p_a, $p^{(1)}$ il genere aritmetico e il genere lineare di F, ed ammettiamo che tra il grado n e il genere π di F passi la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$, abbiamo per lo i-genere P_i la limitazione (n.° 5 (1))

$$P_i \geqq \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + p_a + 1 \qquad (n < 2\pi - 2,\ i > 1); \qquad (1)$$

mentre il genere virtuale Π_i e il grado virtuale N_i del sistema i-canonico, di cui $P_i - 1$ è la dimensione, sono espressi da

$$\Pi_i = \frac{i(i+1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1, \quad N_i = i^2(p^{(1)} - 1) \qquad (n \leqq 2\pi - 2,\ i \geqq 1). \quad (2)$$

La formola (1) è stata ottenuta nella ipotesi che pel sistema $|C|$ valesse la disuguaglianza $n < 2\pi - 2$; mentre le superficie che stiamo ora considerando possono anche avere sezioni piane C per cui valga la relazione $n = 2\pi - 2$ (non mai $n > 2\pi - 2$, chè altrimenti la superficie sarebbe riferibile ad una rigata e quindi possederebbe infinite curve eccezionali). Ammessa l'ultima uguaglianza si osservi (n.° 5) che il ragionamento con cui si perviene alla formola (1), e la (1) stessa, continuano a sussistere quando si sappia che

la serie segata dal sistema $|iC'|$ sopra una curva di $|iC|$ è non speciale; mentre se la serie stessa fosse speciale bisognerebbe modificare la (1) diminuendo di 1 il secondo membro. Ma in questo secondo caso si ottiene un risultato molto più espressivo osservando che la detta serie, se è speciale, è la serie canonica (come risulta dal confronto del suo ordine col genere della curva a cui appartiene); allora però $|iC'|$ è il sistema aggiunto ad $|iC|$. Ora dall' identità

$$|iC'| = |(iC)'| = |(i-1)C + C'|$$

segue

$$|(i-1)C'| = |(i-1)C|;$$

e questa afferma che esiste il sistema $(i-1)$-canonico, composto di una sola curva d'ordine zero; quindi $P_{i-1} = 1$. D'altronde, uguagliando ad es. i gradi di $|(i-1)C|$ e $|(i-1)C'|$, si trova che nelle stesse ipotesi è $p^{(1)} = 1$; e direttamente si vede che la superficie in questione ha il genere geometrico p_g e tutti i plurigeneri minori o uguali a 1, in particolare però

$$P_{i-1} = P_{2(i-1)} = P_{3(i-1)} = \cdots = 1,$$

mentre il genere aritmetico vale $p_a \leq p_g \leq 1$. Per una siffatta superficie è inutile di surrogare la formola (1) con un'altra, la quale non potrebbe dar nulla di più di quel che ora si sia esposto.

Concludiamo adunque:

Sopra una superficie possedente un numero finito di curve eccezionali (e quindi non trasformabile in una rigata), la quale abbia il genere lineare $p^{(1)} > 1$, *lo i-genere* P_i *è espresso dalla formola* (1), *ed è quindi maggiore di zero per tutti i valori di i superiori ad un certo limite* (*).

Se invece la superficie ha il genere lineare $p^{(1)} = 1$, la formola (1) può cadere realmente in difetto. Esistono infatti superficie a sezioni di genere π, d'ordine $n = 2\pi - 2$, le quali hanno

$p^{(1)} = 1, \quad p_a = P_i = 1$ per qualsiasi valore di i,

come ad es. la superficie generale del quarto ordine; e superficie che nella stessa ipotesi $(n = 2\pi - 2)$ hanno

$p^{(1)} = 1, \quad p_a = 0, \quad P_i = 0,\ 1,$ secondochè i è dispari o pari,

come ad es. la superficie del sesto ordine passante doppiamente per gli spi-

(*) Quest' ultima osservazione è stata applicata nello studio delle superficie con $p^{(1)} = 2, 3 \ldots$ Cfr. due Note di Enriques nei Rendic. della R. Accad. d. Lincei, febbraio e marzo 1897.

goli di un tetraedro. Altri tipi di superficie si potrebbero citare, sui quali non intendiamo fermarci qui.

Ritornando alle superficie con $p^{(1)} > 1$, accanto al limite inferiore per lo i-genere fissato dalla (1), si può assegnare pure un limite superiore a P_i mediante la formola

$$P_i \leqq p_g + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1, \tag{2}$$

dove i deve esser preso abbastanza grande perchè sia $P_{i-1} > 0$. La (2) si giustifica osservando che il sistema i-canonico sega sulla curva generica del sistema $(i-1)$-canonico la serie canonica, lasciando per residuo il sistema canonico. Anche la (2) cade in difetto per $p^{(1)} = 1$, come risulta da effettivi esempi di superficie rappresentabili sul piano doppio (*).

21. Nel numero precedente noi abbiamo definito il genere lineare $p^{(1)}$ per ogni superficie avente un numero finito di curve eccezionali. Ora si può chiedere se quella definizione possa presentarsi sotto tal forma, da estendersi anche al caso delle superficie che posseggono infinite curve eccezionali e quindi appartengono alla famiglia delle rigate.

Basta osservare a tal fine che, per definizione, sopra una superficie della prima categoria, possedente $e \geqq 0$ curve eccezionali, il genere lineare $p^{(1)} = \omega + e$ è il massimo valore che possa assumere l'invariante relativo ω calcolato sopra tutte le superficie in corrispondenza birazionale con quella considerata (appartenenti cioè alla stessa classe di quella); quel massimo corrisponde precisamente alle superficie della classe che son prive di curve eccezionali.

Ora è il caso di esaminare se partendo da una superficie della seconda categoria (razionale o rappresentabile sopra una rigata), e calcolando i valori di ω per tutte le superficie birazionalmente identiche a quella, questi valori ammettano un massimo finito, che sarà allora un invariante assoluto della superficie. La risposta, come ora vedremo, è affermativa; potremo adunque dar la seguente definizione generale del genere lineare (**):

Dicesi genere lineare (principale) $p^{(1)}$ di una data superficie qualsiasi

---

(*) Cfr. Enriques, *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$*. Rendic. della R. Accad. d. Lincei, 1898.

(**) Castelnuovo, *Sul genere lineare di una superficie*... Rendic. della R. Accad. d. Lincei, giugno 1897; occorre però avvertire che in questa Nota sono scambiati gli aggettivi *principale* e *secondario* applicati ai generi lineari. La nuova dicitura adottata nel testo sembra la più conveniente.

il massimo valore che assume l'invariante relativo ω *calcolato su tutte le superficie in corrispondenza birazionale con quella.*

Veniamo ora a dimostrare l'esistenza del massimo valore di ω per le superficie razionali, e per quelle che son rappresentabili sopra una rigata irrazionale.

Trattiamo anzitutto questo secondo caso.

Se una superficie F è in corrispondenza birazionale con una rigata di genere $p > 0$, la F contiene un fascio di genere p di curve razionali, immagini delle generatrici della rigata. Questo fascio ci permette di calcolare l'invariante relativo I della F, servendoci della estensione della formola di ZEUTHEN-SEGRE stabilita nella osservazione del n.° 6. Troviamo precisamente

$$I = \Delta - 4p,$$

dove $\Delta \geqq 0$ è il numero delle curve del fascio irrazionale che posseggono un punto doppio (e quindi si spezzano, trattandosi di curve razionali). Segue di qua che $I \geqq -4p$, ed il valore minimo, $-4p$, è raggiunto se F stessa è rigata, poichè per una rigata è $\Delta = 0$. D'altra parte si ha la relazione fondamentale (n.° 6)

$$I + \omega = 12 p_a + 9 = -12p + 9 \qquad (p_a = -p).$$

Segue subito di qua che

$$\omega \leqq -8(p-1) + 1,$$

il valore massimo essendo raggiunto quando ad es. ω venga calcolato sulla rigata stessa. Dunque per definizione:

Una rigata di genere $p > 0$ (ed ogni superficie riferibile birazionalmente a quella) ha il genere lineare

$$p^{(1)} = -8(p-1) + 1$$

Il ragionamento ora applicato alle rigate irrazionali non si estende al piano e alle superficie razionali. Per queste conviene proceder direttamente nel modo che segue. Si osservi anzitutto che il valore di ω calcolato per il piano, partendo da un sistema privo di punti base, ad es. dal sistema delle quartiche piane ($\pi = 3$, $n = 16$, $\pi' = 0$), è

$$\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) = 10.$$

Rimane però il dubbio che calcolando ω per una superficie razionale, diversa dal piano, si possa trovare un valore superiore. Per toglier questo dubbio

si consideri una superficie razionale F il cui ω sia > 1, e sopra questa si fissi un sistema lineare irriducibile $|C|$ di curve, privo di punti base, avente il genere $\pi \geq 1$, e il grado n; sia $|C'|$ il sistema aggiunto, di cui indichiamo con π' il genere. Per l'arbitrio di cui si dispone nella scelta di $|C|$, si potrà sempre supporre che $|C'|$ sia irriducibile; ed allora si concluderà (in base al n.° 14) che $\pi > \pi'$. Ciò premesso, si formi il sistema $|C - C'|$. Il n.° 5 (formole (1)', (2)') ci insegna a calcolarne i caratteri. Vediamo così che la dimensione del detto sistema è

$$R \geq \omega - 1;$$

mentre il genere (virtuale) vale

$$\Pi = 1.$$

Dunque $|C - C'|$ è un sistema di curve ellittiche di dimensione $\geq \omega - 1$. E siccome sopra il piano, o sopra una superficie razionale, un sistema di curve ellittiche ha la dimensione ≤ 9, segue che per la nostra superficie è $\omega \leq 10$; mentre per il piano è $\omega = 10$. Concludiamo:

Il genere lineare di una superficie razionale è $p^{(1)} = 10$, e coincide col valore che ha l'invariante relativo ω calcolato sul piano.

Riassumendo, possiamo dire ormai che per ogni superficie vien definito il genere lineare $p^{(1)}$. Precisamente, in relazione coi valori del genere lineare, le superficie possono classificarsi nel seguente modo:

A) Superficie per cui il genere lineare $p^{(1)} \geq 1$; la famiglia di queste si suddivide in due:

a) se sulla superficie esiste un sistema con $n > 2\pi - 2$, la superficie è razionale ($p^{(1)} = 10$) o riferibile a una rigata ellittica ($p^{(1)} = 1$);

a') se sulla superficie non esiste un sistema siffatto, il processo di aggiunzione applicato a partire da un sistema generico non si estingue mai; ed anzi se $p^{(1)} > 1$, esistono i sistemi pluricanonici da un certo punto in poi ($P_i > 0$ per i abbastanza elevato); mentre nulla di definitivo si può dire per ora, sotto tal rapporto, se $p^{(1)} = 1$.

B) Superficie per cui il genere lineare $p^{(1)} < 1$; *queste superficie son tutte riferibili birazionalmente a rigate di genere* $p > 1$, *dove* $p^{(1)} = -8(p-1) + 1$.

Si ha di qua un criterio per decidere se una superficie sia rappresentabile sopra una rigata di genere $p > 1$; mentre un criterio analogo, basato esclusivamente sul valore di $p^{(1)}$, viene a mancare per le superficie rappresentabili sul piano o sulla rigata ellittica ($p = 0, 1$).

22. Volendo dare una condizione che valga ad esprimere la riferibilità di una superficie ad una rigata, anche nei casi $p = 0, 1$, si presenta assai naturale l'idea di modificare la definizione del genere lineare $p^{(1)}$ data innanzi, introducendo, accanto al carattere $p^{(1)}$ già definito, un nuovo invariante che diremo *genere lineare secondario* e designeremo con $\overline{p^{(1)}}$. Si chiamerà *genere lineare secondario* $\overline{p^{(1)}}$ *di una classe di superficie, il massimo valore che raggiunge l'invariante relativo* ω, *calcolato su quelle superficie della classe per le quali è soddisfatta la condizione* $n \leqq 2\pi - 2$ *tra l'ordine e il genere di una sezione piana.*

Dunque per definizione è sempre $\overline{p^{(1)}} \leqq p^{(1)}$. Anzi il genere lineare secondario non differisce dal principale $p^{(1)}$ per quelle superficie che hanno un numero finito di curve eccezionali (e quindi non sono trasformabili in rigate), perchè queste superficie posseggono solo sistemi lineari per cui $n \leqq 2\pi - 2$. Ed è pure $\overline{p^{(1)}} = p^{(1)}$ per le rigate di genere $p > 1$, potendosi supporre che le sezioni piane della rigata su cui si calcola l'$\omega = p^{(1)}$, siano curve speciali ($n \leqq 2\pi - 2$), coll'avvertenza che la rigata si ridurrebbe a un piano doppio quando fosse iperellittica. Invece per il piano e la rigata ellittica il carattere $p^{(1)} = 10, 1$ differisce necessariamente dal $\overline{p^{(1)}}$ che non può superare il valore zero. Che sia $\overline{p^{(1)}} \leqq 0$ segue da ciò, che in una superficie con infinite curve eccezionali avente il carattere $(\overline{p^{(1)}} =)\ \omega \geqq 1$, il sistema delle sezioni piane soddisfa coi suoi caratteri alla disuguaglianza $n > 2\pi - 2$ (n.° 14), e non alla $n \leqq 2\pi - 2$ che serve di base al calcolo del $\overline{p^{(1)}}$. Ora volendo dimostrare che tanto per il piano, quanto per la rigata ellittica è proprio $\overline{p^{(1)}} = 0$, basta far vedere che sull'una e sull'altra superficie si possono costruire sistemi lineari di curve per i quali $n \leqq 2\pi - 2$, ed $\omega = n + \pi' - 3(\pi - 1) = 0$.

Per il piano si consideri infatti il sistema ∞^2 delle sestiche con 8 punti base doppi e due punti base semplici coniugati sulle sestiche (sistema del quale, volendo, si potrebbe anche prendere un multiplo); qui si ha $n = 2$, $\pi = 2$, $\pi' = 1$, e quindi $n = 2\pi - 2$, $\omega = 0$.

Per ottenere un esempio relativo alle rigate ellittiche, si parta anzitutto da una rigata priva di singolarità, come è la rigata del quinto ordine dello spazio a quattro dimensioni; si seghi questa mediante le varietà del sesto ordine che passano per 14 generatrici. Si otterrà un sistema lineare di curve, che (come facilmente si verifica) ha la dimensione 6, il grado 12 e il genere 6; il sistema, essendo privo di punti base, ha il carattere $\omega = 1$ (n.° 21).

Se ora si costringono le curve del sistema a passare doppiamente per

un punto della rigata, si otterrà un nuovo sistema ∞^3 rappresentativo di una superficie di ordine $n = 8$, a sezioni del genere $\pi = 5$, dello spazio ordinario, per la quale è $n = 2\pi - 2$, $\omega = 0$.

In breve possiamo dire che per ogni superficie si ha

$$\overline{p^{(1)}} = p^{(1)},$$

tranne che per il piano e per le rigate ellittiche che hanno

$$\overline{p^{(1)}} = 0 \text{ e rispettivamente } p^{(1)} = 10,\ 1.$$

Concludiamo:

La condizione perchè una superficie possa porsi in corrispondenza birazionale con una rigata (razionale o no) viene espressa dall'esser il genere lineare secondario $\overline{p^{(1)}} \leqq 0$.

Nelle applicazioni concrete questo criterio non ha però un vero valore pratico, giacchè il calcolo del $\overline{p^{(1)}}$ esige in sostanza l'effettuazione di quelle stesse operazioni che occorrono per riconoscere direttamente se la superficie sia riferibile ad una rigata.

23. Il criterio suddetto permette tuttavia di ritrovare le condizioni già note di razionalità di una superficie. Si abbia una superficie di genere aritmetico e geometrico nullo, $p_a = p_g = 0$, e di genere lineare secondario $\overline{p^{(1)}}$. Applicando a questo caso il ragionamento del n.° 20, si trova un limite inferiore al bigenere della superficie, limite dato dalla formola

$$P_2 \geqq \overline{p^{(1)}}.$$

Se ora si suppone che la superficie abbia anche il bigenere nullo, $P_2 = 0$ (ipotesi che porta con sè l'altra $p_g = 0$), ne seguirà $\overline{p^{(1)}} \leqq 0$; la superficie sarà dunque riferibile ad una rigata, che d'altra parte dovrà esser razionale perchè si ha $p_a = 0$ (donde si trae $\overline{p^{(1)}} = 0$). E siccome inversamente una superficie razionale ha certo $p_a = P_2 = 0$, si conclude (*):

Le condizioni di razionalità di una superficie sono espresse dall'annullarsi del genere aritmetico e del bigenere ($p_a = P_2 = 0$).

24. Ora si affaccia spontanea la domanda: Quando il genere aritmetico p_a di una superficie è inferiore a 0, si riuscirà ad esprimere le condizioni

(*) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero.* Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), (serie III), tom. X (1896).

perchè la superficie sia riferibile ad una rigata (di genere $-p_a$), annullando un certo numero di plurigeneri? Per dare una risposta occorre esaminare se le superficie non riferibili a rigate, aventi il genere lineare (principale = secondario) $p^{(1)} > 0$, debbano possedere sempre delle curve pluricanoniche di un certo indice i, sia pur elevato. Ora dalla formola

$$P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1)+1,$$

che sussiste quando $p^{(1)} > 1$, abbiamo già concluso che, in questa ipotesi, esistono curve i-canoniche per i assai alto. Ma se $p^{(1)} = 1$, l'esistenza di curve pluricanoniche di indice qualsiasi resta dubbia per ora.

Non sappiamo dunque rispondere oggi all'importante questione sopra enunciata. Soltanto alcuni esempi di superficie contenenti un fascio ellittico di curve ellittiche (superficie che ci proponiamo di studiare) mostrano che è impossibile di esprimere le condizioni perchè una superficie di genere aritmetico $-p\,(p > 0)$ sia riferibile ad una rigata, coll'annullare un certo numero di plurigeneri dipendente dal valore di p.

Firenze, autunno 1900.

Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena.

(*Di* C. A. DELL'AGNOLA, *a Padova.*)

Nella teoria delle funzioni analitiche rimaneva, sino a poco tempo fa, insoluto il problema seguente:

« Data una funzione analitica mediante i suoi elementi

$$F(a),\ F^{(1)}(a),\ F^{(2)}(a),\ldots,\ F^{(n)}(a),\ldots \tag{1}$$

relativi ad un punto regolare a, determinare, colla sola conoscenza di questi elementi, la espressione, che la rappresenta nel suo campo di validità, in una regione contenente il punto a e che sia la più estesa possibile. »

Questa importantissima questione è stata risoluta recentemente, in modo affatto generale, dall'illustre prof. MITTAG-LEFFLER (*).

Sopra ogni raggio uscente dal punto regolare a, consideriamo il segmento (finito od infinito), che è compreso fra questo punto ed il punto singolare del raggio stesso più vicino al punto a. Si ha così un continuo formato di un sol pezzo, che l'A. chiama *stella* appartenente agli elementi $F(a)$, $F^{(1)}(a),\ldots$, $F^{(n)}(a),\ldots$ È precisamente in tutta la stella così definita, che l'A. dà l'espressione della funzione col solo sussidio degli elementi (1), mediante una serie di polinomi del tipo

$$\sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

ove le $c_\nu^{(n)}$ sono coefficienti numerici, che possono venire determinati in maniere differenti. Ciò poi, che è molto notevole relativamente a questi coeffi-

---

(*) *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* Acta math., Tom. 23.

cienti, si è che essi, una volta determinati, sono affatto *indipendenti* dalla scelta del punto a e degli elementi (1) ad esso corrispondenti; in altri termini essi sono valevoli per qualunque funzione analitica regolare nel punto stesso.

Io mi propongo, in certa qual guisa, la questione inversa, di studiare cioè le serie di polinomi in quanto esse sono atte a rappresentare in un campo (stella), in cui sono convergenti, un ramo di funzione analitica monogena (*).

Nel presente lavoro si troverà uno studio generale delle serie del tipo

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n(x) \,.\, x^n \tag{2}$$

in cui i coefficienti $a_n(x)$ sono funzioni razionali intiere della variabile complessa x. Le proprietà di queste serie si devono tuttavia poter estendere a quelle di un tipo più generale, come spero di poter dimostrare.

Per istudiare poi la serie (2) prendo le mosse dalla serie

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n(x)\, y^n, \tag{3}$$

essendo y una nuova variabile complessa (**). Se si pone $x = u + i\,v$, il limite superiore dei valori limiti del gruppo

$$|\,a_1(x)\,|\,,\ |\sqrt{a_2(x)}\,|, \ldots |\sqrt[n]{a_n(x)}\,|\,, \ldots$$

è, in generale, una funzione positiva di u e v, $\alpha(u,\ v)$, e quindi è pure funzione delle stesse variabili il raggio di convergenza della serie (3), essendo quest'ultimo, per il noto teorema di Cauchy-Hadamard, dato da

$$R(u,\ v) = \frac{1}{\alpha(u,\ v)}\,\cdot$$

Relativamente alla funzione $R(u,\ v)$ faccio la sola ipotesi, che esista un intorno dell'origine, in cui il *limite inferiore* della funzione stessa sia diverso da zero.

Nel § 1 faccio vedere che la serie (2) converge in generale in una

(*) A proposito delle serie di funzioni razionali vedasi Weierstrass, *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften, August, 1880. Vedasi anche d'Arcais, *Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse.* Rivista di Matematica, 1895.

(**) L'idea di servirsi delle serie di funzioni di due variabili per lo studio di certe altre i cui termini sono funzioni di una variabile sola, non è nuova: essa è stata il punto di partenza di alcune interessanti ricerche del prof. Pincherle, *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi.* Annali di Matematica, ser. II, tom. XII, 1884.

stella S, col centro nell'origine, che chiamo perciò *stella di convergenza* della serie stessa. Oltre a ciò definisco poi un'altra stella Σ, concentrica alla stella S, la quale non può estendersi all'infuori di quest'ultima, ma che, come caso particolare, può essere contenuta intieramente, od anche coincidere in tutto od in parte colla stella S.

Seguono nel § 2 alcune considerazioni sulle funzioni razionali intiere e la dimostrazione di un teorema, coll'aiuto del quale dimostro poi nel § 3 la convergenza *uniforme* della serie (2) in ogni campo finito X contenuto nella stella Σ. Dal che, in base altresì ai risultati ottenuti da WEIERSTRASS nella citata Memoria, segue appunto quanto ho annunziato sopra, che cioè la serie (2) rappresenta nella stella Σ una branca uniforme di una funzione analitica monogena. Cosichè, in particolare, se quest'ultima funzione non è continuabile fuori della stella Σ, la serie (2) la rappresenta ivi completamente.

Ad illustrare la teoria seguono infine, nel § 4, alcuni esempi.

§ 1. Consideriamo la serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n\, a_n(x)\, y^n \tag{1}$$

in cui x e y sono variabili complesse e le $a_n(x)$ funzioni razionali intiere (*). Assumeremo senz'altro un unico piano rappresentativo per le due variabili complesse x e y, in cui converremo altresì di riferirle ai medesimi assi cartesiani ortogonali $O\,u$ ed $O\,v$.

Si consideri il gruppo di numeri, che designerò brevemente con G_x,

$$|\,a_1(x)\,|,\ |\sqrt{a_2(x)}\,|, \ldots\ |\sqrt[n]{a_n(x)}\,|, \ldots$$

corrispondentemente ad un valore prefissato della variabile x. Posto $x = u + iv$, il limite superiore del gruppo derivato di G_x, è, come abbiamo notato sopra, una funzione positiva di u e v, che indicheremo con $\alpha(u, v)$. In virtù del noto teorema di CAUCHY-HADAMARD, la serie (1) converge per $x = u + i\,v$, e per y interno ad un cerchio col centro nell'origine e di raggio

$$R(u, v) = \frac{1}{\alpha(u, v)}. \tag{2}$$

Se poi supponiamo, che si abbia

$$R(u, v) > |\,x\,|,$$

(*) Le considerazioni, che si trovano svolte in questo paragrafo, valgono anche nella ipotesi, che le $a_n(x)$ sieno funzioni qualunque della variabile complessa x.

la serie (1) è convergente per tutti i valori di y interni ad un cerchio contenente il punto x e quindi anche per $y = x$, vale a dire nel punto x risulta convergente la serie

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n(x)\, x^n. \qquad (3)$$

Chiameremo col Weierstrass (*) *campo di convergenza* di quest'ultima serie, l'insieme dei punti x in cui essa è convergente.

Per l'osservazione precedente appartengono al campo di convergenza della serie (3) tutti quei punti x del piano in cui si ha $R(u, v) > |x|$.

Relativamente alla funzione $\alpha(u, v)$ (la cui natura dipende da quella delle funzioni $a_n(x)$), ammetteremo soltanto l'ipotesi, che *esista un intorno dell'origine in cui essa si mantenga finita.* Segue da questa ipotesi, che se si considera un cerchio di raggio ρ col centro nell'origine e contenuto in tale intorno, il *limite inferiore* dei valori, che la funzione $R(u, v)$ assume in questo cerchio (contorno incluso) è diverso da zero, e questo limite dipenderà in generale da ρ, vale a dire sarà una funzione positiva di ρ, che indicheremo con $r(\rho)$. Sia a un numero reale e positivo tale che

$$a < \rho, \quad a < r(\rho);$$

si avrà manifestamente

$$r(a) \geqq r(\rho)$$

e in conseguenza

$$r(a) > a \geqq |x|, \qquad (4)$$

qualunque sia il punto x del cerchio $(0, a)$. D'altronde, essendo $r(a)$ il limite inferiore dei raggi di convergenza della serie (1) nel cerchio $(0, a)$ (contorno incluso), per ogni punto x di questo cerchio

$$R(u, v) \geqq r(a)$$

e quindi per la (4)

$$R(u, v) > |x|,$$

vale a dire, per una osservazione fatta sopra, la serie (3) converge nel cerchio $(0, a)$, incluso il contorno. Se in particolare per ogni numero reale e positivo a si avesse $r(a) > a$, la serie (3) sarebbe convergente in tutto il piano (**).

(*) Loco citato.

(**) Per la convergenza della serie (3) in tutto il piano notiamo, che basta fare l'ipotesi meno restrittiva, che in ogni punto x del piano risulti $R|u, v| > |x|$.

Escluso questo caso, pel quale non occorrono speciali considerazioni, è facile vedere, che *esiste al più un unico numero reale e positivo a, tale che si abbia* $r(a) = a$. Invero, se a_1 ed a_2 sono due numeri reali e positivi distinti, non può essere

$$r(a_1) = a_1, \quad r(a_2) = a_2,$$

perchè se si suppone ad esempio $a_1 < a_2$, si avrebbe

$$r(a_1) < r(a_2),$$

mentre per la definizione della funzione $r(\rho)$ deve essere

$$r(a_1) \geqq r(a_2).$$

In particolare esisterà quindi al più un solo numero razionale e positivo a tale che $r(a) = a$.

Dopo ciò noi possiamo ripartire i numeri razionali e positivi in due classi nel modo seguente: attribuendo ad una prima classe R_1 tutti i numeri razionali e positivi α pei quali risulta $r(\alpha) > \alpha$ e ad una seconda classe R_2 quelli pei quali si ha $r(\alpha) < \alpha$. La ripartizione così ottenuta è una *sezione* eseguita nel campo razionale e positivo, vale a dire gode delle tre proprietà *A*), *B*) e *C*), che definiscono le sezioni (*). Invero, ogni numero razionale e positivo, uno al più escluso, trova posto o nell'una o nell'altra delle due classi ed uno stesso numero razionale α non può trovarsi contemporaneamente in amendue, poichè altrimenti si avrebbe ad un tempo $r(\alpha) > \alpha$ ed $r(\alpha) < \alpha$, il che è assurdo. Se un numero razionale α appartiene alla classe R_1 ed α' è un altro numero razionale minore di α, anche α' appartiene alla classe R_1. Invero per ipotesi si ha $r(\alpha) > \alpha$; inoltre dall'essere $\alpha' < \alpha$, segue che $r(\alpha') \geqq r(\alpha)$ e quindi che $r(\alpha') > \alpha'$. Analogamente si vedrebbe, che se un numero α appartiene alla classe R_2, e α' è un altro numero razionale positivo maggiore di α, anche α' appartiene alla classe R_2. Valgono così per la nostra ripartizione le proprietà *A*) e *B*). È facile vedere pōi, che escludendo, ove occorra, un numero da una delle due classi, si può far in modo che essa goda altresì della proprietà *C*). Alla sezione (R_1, R_2) corrisponde in conseguenza un numero reale e positivo

$$r \equiv (R_1, R_2).$$

Pel modo stesso con cui è stato definito il numero reale e positivo r, si ha

(*) V. le *Lezioni di Algebra Complementare* del prof. G. Ricci, Padova, 1900.

che se a è un numero reale e positivo qualunque minore di r è $r(a) > a$ e quindi, per una osservazione fatta sopra, la serie (3) è convergente nel cerchio $(0, a)$, incluso il contorno.

Posto $x = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$, il raggio di convergenza della serie (1) relativo al punto x si potrà altresì riguardare come funzione di ρ e di ϑ, che indicheremo con $r(\rho, \vartheta)$. Pei punti di un raggio uscente dall'origine, l'argomento ϑ si mantiene costante e in conseguenza, lungo questo raggio, la funzione $r(\rho, \vartheta)$ varia soltanto con ρ.

Supponendo ϑ costante, attribuiamo un numero razionale e positivo α ad una classe A_1, se in ogni punto dell'intervallo $(0, \alpha)$ (α incluso) è $r(\rho, \vartheta) > \rho$ e ad una seconda classe A_2 se fra 0 ed α esiste almeno un numero reale ρ per cui risulti $r(\rho, \vartheta) \leq \rho$. In questa maniera ogni numero razionale positivo trova posto o nella classe A_1 o nella classe A_2, nè uno stesso numero razionale può trovar posto contemporaneamente in amendue. Se poi si considera un numero α della classe A_1, pel modo stesso con cui la ripartizione è stata eseguita, si vede facilmente, che ogni numero razionale e positivo $\alpha' < \alpha$ appartiene esso pure alla classe A_1, e analogamente, che se il numero razionale α appartiene alla classe A_2, ed è $\alpha' > \alpha$, anche α' appartiene alla medesima classe. Anche qui, togliendo ove occorra un numero razionale da una delle due classi, si può far in modo che sussista la proprietà C) delle sezioni. Segue da tutto ciò che la ripartizione (A_1, A_2) è una sezione eseguita nel campo razionale positivo, e ad essa corrisponde in conseguenza un numero reale e positivo, che varierà in generale con l'angolo ϑ e che indicheremo pertanto con r_ϑ, cioè porremo

$$r_\vartheta \equiv (A_1, A_2).$$

Per un particolare valore di ϑ potrà avvenire, che lungo il raggio corrispondente si abbia $r(\rho, \vartheta) > \rho$, qualunque sia il numero reale e positivo ρ, nel qual caso il valore corrispondente di r_ϑ sarà infinito. Se ora sul raggio corrispondente all'angolo ϑ prendiamo una lunghezza $OP = r_\vartheta$ e si osserva, che il numero r_ϑ non può evidentemente scendere al disotto del numero r precedentemente definito, si conclude che al variare di ϑ da O a 2π il vettore (OP) genera una stella S, come fu definita dal prof. Mittag-Leffler (*).

Preso un punto qualunque x interno alla stella S, pel modo con cui questa è stata definita, si ha che nel punto x il raggio di convergenza della

(*) Loco citato.

serie (1) è maggiore del $|x|$ e quindi che nello stesso punto è certamente convergente la serie (3), la quale risulta così convergente in ogni punto x interno ad S. Per questa ragione la stella S la chiameremo *stella di convergenza* della serie (3). Può avvenire, che la stella S rappresenti l'intiero campo di convergenza della serie (3); basta all'uopo, che in ogni punto x esterno ad S risulti $R(u, v) < |x|$. In tal caso (analogamente a quanto avviene per le serie di potenze a coefficienti costanti per le quali il circolo di convergenza rappresenta tutto il campo di convergenza delle serie stesse) il contorno della stella S divide il piano in due parti tali che nell'una la serie (3) è convergente, nell'altra invece è divergente. Ciò dipende naturalmente dal modo di comportarsi della funzione $R(u, v)$ nella regione del piano esterna ad S.

Dalle proprietà delle serie di potenze a coefficienti costanti e dalla definizione ora data per la stessa S, si ha poi immediatamente che:

« *La serie* (3) *è convergente assolutamente in ogni punto x interno alla sua stella di convergenza.* »

Oltre alla stella S definiremo un'altra stella concentrica ad S.

Teniamo costante ϑ, cioè consideriamo ancora i punti di un raggio uscente dall'origine O e per ogni numero razionale e positivo α, prendiamo sul detto raggio, a partire dall'origine, un segmento $OR = \alpha$ e attribuiamo α ad una prima classe P_1, se il limite inferiore dei raggi di convergenza della serie (1) lungo il segmento OR (il punto R incluso), risulta maggiore del numero α, e ad una seconda classe P_2 se invece tale limite inferiore è minore di α. Notando, che anche qui esiste al più un solo numero razionale α tale che il limite inferiore del raggio di convergenza lungo il segmento OR risulti eguale ad α, e, ripetendo lo stesso ragionamento seguito precedentemente per dimostrare che (R_1, R_2) è una sezione del campo razionale positivo, si vedrebbe che la ripartizione (P_1, P_2) è una sezione del medesimo campo e che in conseguenza le corrisponde un numero reale e positivo ρ_ϑ variabile in generale con ϑ, che è cioè una funzione reale e positiva di ϑ. È chiaro che la funzione

$$\rho_\vartheta \equiv (P_1, P_2),$$

non può scendere al di sotto del numero r, che è stato definito fin da principio.

Prendiamo sul raggio corrispondente all'angolo ϑ una lunghezza $OQ = \rho_\vartheta$ e facciamo variare ϑ da 0 a 2π; il vettore (OQ) genera così una nuova stella, che designerò d'ora in poi con la lettera Σ.

Come risulta tosto dalle definizioni ora date, ogni numero della classe P_1 appartiene alla classe A_1, per cui noi abbiamo evidentemente

$$\rho_\vartheta \leq r_\vartheta,$$

valevole per tutti i valori di ϑ dell'intervallo $(0, 2\pi)$, dal che segue, che la stella Σ può, come caso particolare, coincidere intieramente od in parte colla stella S od anche essere contenuta in S.

Mi propongo di dimostrare, che la serie (3) è convergente *uniformemente* in ogni campo finito X contenuto nella stella Σ testè definita. Premetterò all'uopo alcune considerazioni concernenti le funzioni razionali intiere di una variabile complessa e la dimostrazione di un teorema.

§ 2. Sia $f(x)$ una funzione razionale intiera di grado m della variabile complessa x e si ponga

$$f(x) = y. \tag{1}$$

Questa equazione definisce x come funzione algebrica di y ad m rami. Se nel piano della variabile complessa y facciamo descrivere a questa variabile una circonferenza di raggio a, gli m rami della funzione algebrica x di y definita dalla (1), descriveranno, nel piano x, delle curve chiuse; o, se vogliamo, una curva algebrica di grado $2m$ che rappresenta il luogo dei punti in cui la funzione $f(x)$ ha il suo modulo costantemente eguale ad a (*).

Designando poi con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ le m radici, distinte o no, della equazione

$$f(x) = 0,$$

la curva di ordine $2m$ corrispondente alla circonferenza di raggio a, è una curva di Cassini a m fuochi, che sono precisamente i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; vale a dire il luogo dei punti del piano le cui distanze dagli m punti fissi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, hanno sempre un prodotto costante (**). Relativamente a questa curva facciamo le seguenti osservazioni, che scendono facilmente dalle proprietà generali delle funzioni algebriche:

1.° Se entro alla circonferenza di raggio a (contorno incluso) non vi sono punti critici, la curva è costituita da m curve chiuse staccate contenenti nel loro interno rispettivamente i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

(*) L. Schlaefli, *Sull'uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione è costante.* Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Tom. VI.

(**) Vedasi ad es. Briot e Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques.* Deuxième édition, 1875, pag. 76, és. IX.

2.° Se sulla circonferenza vi è un punto critico (senza che ve ne sieno internamente) delle m curve chiuse alcune, oppure tutte, hanno un punto ed uno solo in comune.

3.° Se entro alla circonferenza vi sono dei punti critici, alcune delle curve suddette si riducono ad una sola; e se a è abbastanza grande in guisa che la circonferenza contenga tutti i punti critici, tutte le curve si riducono ad un'unica curva comprendente nel suo interno gli zeri della funzione $f(x)$.

Riassumendo, alla circonferenza di raggio a, corrisponde una curva algebrica di ordine $2m$, la quale divide il piano in due parti: l'una *interna* e l'altra *esterna* alla curva stessa. È chiaro di per sè che nei punti x appartenenti alla regione interna è

$$|f(x)| < a$$

ed in quelli situati nella regione esterna si ha

$$|f(x)| > a.$$

Ciò premesso, sia data una successione di funzioni razionali intiere della variabile complessa x

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x),\ldots$$

e assieme a questa consideriamo un'altra successione di numeri reali e positivi

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots \tag{2}$$

Si supponga che nel punto x_0, almeno a partire da un certo valore n_0 dell'indice, cioè per $n > n_0$ risulti

$$|f_n(x)| < a_n. \tag{3}$$

In virtù delle considerazioni svolte sopra, per ogni $f_n(x)$, in cui si supponga $n > n_0$, esiste una curva chiusa C_n comprendente il punto x_0 e tale che nell'area da essa contenuta è sempre verificata la (3). Avremo così intorno ad x_0 infinite curve chiuse comprendenti tutte x_0. Consideriamo un raggio qualunque uscente da x_0; i punti d'incontro di esso con siffatte curve, costituiscono un gruppo infinito: sia P il punto limite di questo gruppo più vicino al punto x_0 e indichiamo con ρ la distanza del punto x_0 dal punto P e brevemente con (ρ) il vettore coll'origine in x_0 e l'estremo in P. La lunghezza ρ del vettore (ρ) varierà in generale da raggio a raggio vale a dire ρ sarà una certa funzione di ϑ, $\rho = \rho(\vartheta)$, designando con ϑ l'angolo che il vettore forma con un raggio iniziale uscente da x_0. Si supponga che il limite inferiore dei valori, che la

funzione $\rho(\vartheta)$ assume nell'intervallo $(0, 2\pi)$ (estremi inclusi) sia un numero $\delta > 0$; allora se si fa variare ϑ da 0 a 2π, il vettore variabile (ρ) genera una stella, che indicheremo con $S_{(a_n)}^{(x_0)}$, l'estensione e la forma della quale dipenderà dalla natura delle date funzioni $f_n(x)$ e degli elementi a_n della successione (2).

In base alla definizione ora data di stella $S_{(a_n)}^{(x_0)}$, è facile vedere che « *per ogni campo connesso* Γ *contenuto in* $S_{(a_n)}^{(x_0)}$ *esiste un numero intiero e positivo* m_0 *tale che per* $n > m_0$ *e per tutti i punti* x *di* Γ *risulta*

$$|f_n(x)| < a_n \text{ ».}$$

Invero, per definizione, esiste al più un numero finito m' di linee C_n, che attraversano il campo Γ; per cui si potrà sempre trovare un numero intiero e positivo m_0 abbastanza grande in guisa che fra le curve $C_1, C_2, \ldots, C_{m_0}$, sieno comprese le m' curve che attraversano il campo stesso. È chiaro allora che per $n > m_0$, la curva C_n comprende nel suo interno il campo Γ e in conseguenza che la diseguaglianza $|f_n(x)| < a_n$ è verificata in ogni punto x di Γ a partire dal valore m_0 di n.

Per l'esistenza della stella $S_{(a_n)}^{(x_0)}$ abbiamo supposto sopra, che la funzione $\rho(\vartheta)$ (lunghezza del vettore variabile (ρ)) abbia un limite inferiore $\delta > 0$, allorquando si fa variare ϑ da 0 a 2π. Ora, relativamente a tale funzione, osserviamo che « *se per ogni punto di un intorno di* x_0 (x_0 *incluso*) *esiste un numero intiero e positivo* n_0 *tale che per* $n > n_0$ *risulti*

$$|f_n(x)| < a_n,$$

il limite inferiore dei valori di $\rho(\vartheta)$ *nell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *non può essere nullo* ».

Nel caso contrario infatti, in un intorno per quanto piccolo di x_0 esisterebbero sempre punti x pei quali da un n_0 in avanti risulterebbe

$$|f_n(x)| > a_n$$

per infinite funzioni $f_n(x)$, il che contraddice l'ipotesi fatta.

Dimostriamo ora il seguente teorema: « *Se*

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots$$

è una successione di funzioni razionali intiere della variabile complessa x;

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$$

una successione di numeri reali e positivi, e per ogni punto di un'area

connessa Γ *esiste un* n_0 *tale che per* $n > n_0$ *risulti*

$$|f_n(x)| < a_n,$$

ogni campo X *contenuto in* Γ *è altresì contenuto in una stella* $S^{(x)}_{(a_n)}$ *col centro in un punto qualunque interno a* Γ. »

Sia X' un campo contenuto in Γ e che contiene nel suo interno il campo X. Per l'ipotesi posta e per l'ultima osservazione fatta, esiste la stella $S^{(x)}_{(a_n)}$, di cui è fatta parola nell'enunciato del teorema, col centro in un punto qualunque x intorno a Γ. Posso supporre che il campo X' contenga nel suo interno anche il punto x. Un punto generico P del contorno di $S^{(x)}_{(a_n)}$ *non può* coincidere con alcun punto di X' (contorno incluso), altrimenti in un intorno per quanto piccolo di questo punto esisterebbero punti x' nei quali si avrebbe

$$|f_n(x')| > a_n$$

per infinite funzioni $f_n(x)$, il che è contrario all'ipotesi. Segue da ciò, che X' e quindi X, è interno alla stella $S^{(x)}_{(a_n)}$ col centro in un punto qualunque x interno a Γ.

Dal teorema ora dimostrato e da una osservazione fatta sopra, scende immediatamente il corollario: « *Se*

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots$$

è una successione di funzioni razionali intiere della variabile complessa x;

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$$

un'altra successione di numeri reali e positivi, e per ogni punto di un'area connessa Γ *esiste un numero intiero e positivo* n_0 *tale che per* $n > n_0$ *risulti*

$$|f_n(x)| < a_n,$$

per ogni campo X *contenuto in* Γ *esiste un* m_0 *tale che per* $n > m_0$ *le diseguaglianze precedenti sono verificate in ogni punto* x *di* X. »

Prima di passare alla dimostrazione del teorema di cui è fatta parola alla fine del § 1, facciamo ancora le seguenti osservazioni.

Sia E una stella interna e concentrica ad E_1 ed indichiamo, come al solito, con (ρ) e (ρ_1) rispettivamente i vettori generici generatori di E e di E_1. Le quantità ρ e ρ_1 sono funzioni pienamente determinate dell'angolo ϑ, che i vettori (ρ) e (ρ_1) formano con un raggio iniziale uscente dal centro

comune delle due stelle, che suppongo coincidere coll'origine O delle coordinate. Se attribuiamo all'argomento ϑ due valori ϑ_1 e $\vartheta_0 < \vartheta_1$ compresi fra 0 e 2π, corrispondentemente avremo due raggi uscenti da O, i quali staccano dalle due stelle due settori, che indicherò con s ed s_1. Sia l_s *il limite inferiore della funzione* $\rho(\vartheta)$ ed l_{s_1} quello della funzione $\rho_1(\vartheta)$ *nell'intervallo* $(\vartheta_0, \vartheta_1)$ *(estremi inclusi)*; poichè la stella E è contenuta in E_1, si avrà manifestamente

$$l_{s_1} > l_s.$$

Si supponga in fine, che la stella E_1 sia alla sua volta contenuta nella stella Σ definita al § 1. Considerando un raggio uscente da O, indichiamo con ϑ l'angolo corrispondente, con P e P_1 i suoi punti d'incontro coi contorni di E e di E_1 e con $r_{\rho(\vartheta)}$, $r_{\rho_1(\vartheta)}$ rispettivamente i limiti inferiori dei raggi di convergenza della serie (1) (§ 1) lungo i segmenti OP ed OP_1 (estremi inclusi). Per la definizione data di stella Σ, si avrà manifestamente

$$r_{\rho(\vartheta)} \geqq r_{\rho_1(\vartheta)} > \rho_1(\vartheta) > \rho(\vartheta)$$

e queste diseguaglianze valgono per tutti i valori di ϑ dell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Sia r_s *il limite inferiore dei raggi di convergenza della serie* (1) (§ 1) *nel settore* s; è chiaro che r_s coincide col limite inferiore dei valori della funzione $r_{\rho(\vartheta)}$, nell'intervallo $(\vartheta_0, \vartheta_1)$. Ora dalle diseguaglianze precedenti e dall'osservazione fatta sopra, che $l_{s_1} > l_s$, si ha

$$r_s > l_s.$$

§ 3. Ammessa sempre l'ipotesi di cui al § 1 siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

« *La serie*

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n(x)\, x^n,$$

in cui le $a_n(x)$ *sono funzioni razionali intiere della variabile complessa* x, *è convergente in egual grado in ogni campo finito* X *contenuto nella stella* Σ. »

In virtù di un noto teorema di Weierstrass (*), basterà provare, che per ogni punto di X (contorno incluso) esiste un intorno in cui la serie (1) è convergente in egual grado.

(*) Loco citato.

Sia E una stella finita contenuta in Σ e contenente X nel suo interno (*). Preso un punto qualunque x' di X (contorno incluso) si potrà sempre, col centro in x', descrivere un cerchio contenuto in E. Guidiamo dall'origine O le tangenti a questo cerchio; indichiamo con ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$) gli angoli, che esse formano con un raggio iniziale uscente da O e con s il settore, che esse staccano dalla stella E. Designando, come nel paragrafo precedente, con $(\rho(\vartheta))$ il vettore, che genera la stella E, con l_s il limite inferiore della funzione $\rho(\vartheta)$ nell'intervallo $(\vartheta_0, \vartheta_1)$, si avrà manifestamente

$$l_s > |x'|.$$

D'altra parte, per una osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente, si ha che

$$r_s > l_s$$

designando ancora con r_s il limite inferiore dei raggi di convergenza della serie

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n(x)\, y^n \tag{2}$$

nel settore s.

Avremo quindi

$$r_s > l_s > |x'| \tag{3}$$

e da queste diseguaglianze risulta, che col centro in x' si potrà sempre descrivere un cerchio $C_{x'}$, per tutti i punti x del quale (contorno incluso) risulti

$$|x| \leqq l_s < r_s. \tag{4}$$

Posto $x = u + iv$, indichiamo come al solito con $\alpha(u, v)$ il limite superiore del gruppo derivato di

$$G_x = (\sqrt[n]{|a_n(x)|}), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

che, pel teorema di Cauchy-Hadamard citato in principio del § 1, è l'inversa del raggio di convergenza della serie (2); sia L_s il limite superiore della funzione $\alpha(u, v)$ nel settore s. Si avrà evidentemente $r_s = \frac{1}{L_s}$ e quindi, per la (4),

$$|x| \leqq l_s < \frac{1}{L_s}$$

(*) Mittag-Leffler, loco citato.

dalla quale posto

$$l_s = \frac{1}{L_s + \sigma},$$

ove σ è un numero positivo conveniente,

$$|x| \leqq \frac{1}{L_s + \sigma} \tag{5}$$

per tutti i punti x del cerchio $C_{x'}$ (incluso il contorno).

Per tutti i punti x del settore s si avrà poi

$$\alpha(u, v) \leqq L_s;$$

inoltre per ogni punto di s esisterà un n_0 tale che per $n > n_0$ si abbia

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}| < \alpha(u, v) + \sigma'$$

e quindi anche

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}| < L_s + \sigma' \tag{6}$$

essendo σ' un numero positivo qualunque, che possiamo pertanto supporre più piccolo di σ. Posto $L_s + \sigma' = a$, avremo in virtù delle (6)

$$|a_n(x)| < a^n \tag{7}$$

e, per quanto abbiamo visto, per ogni punto x di s esisterà un n_0 tale che per $n > n_0$ sarà verificata questa diseguaglianza. Poichè il cerchio $C_{x'}$ è contenuto in s, in virtù del corollario del teorema al § 2, esisterà un numero intiero e positivo m_0 tale che per $n > m_0$ sarà verificata la (7) e quindi la (6), per tutti i punti x di $C_{x'}$. Da tutto ciò segue, che per $n > m_0$ le (5) e (6) valgono qualunque sia il punto x di $C_{x'}$ (contorno incluso) e quindi che per gli stessi valori di x è verificata la

$$|x| \cdot |\sqrt[n]{a_n(x)}| = |\sqrt[n]{a_n(x)\, x^n}| < \frac{L_s + \sigma'}{L_s + \sigma} = 1 - \varepsilon \tag{8}$$

ove, per essere $\sigma' < \sigma$, ε rappresenta un numero positivo minore dell'unità, Dalle (8) si ha infine, che per $n > m_0$ e per tutti i punti x di $C_{x'}$ è verificata la

$$|a_x(x) \,.\, x^n| < (1 - \varepsilon)^n$$

e questa diseguaglianza dimostra precisamente, in virtù di un noto teorema, la convergenza uniforme della serie (1) nel cerchio $C_{x'}$, e quindi altresì in tutto il campo X.

In base a questo teorema ed a quanto è stato dimostrato da WEIERSTRASS nella Memoria citata, possiamo quindi concludere che:

« *La serie*

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n\, a_n(x) \,.\, x^n$$

rappresenta nella stella Σ un ramo di una funzione analitica monogena. »

§ 4. Daremo in questo paragrafo qualche esempio.

1) Consideriamo la serie

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^n \,.\, x^n; \tag{1}$$

in questo caso abbiamo

$$a_n(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^n = \left(\frac{1 - x^n}{1 - x}\right)^n$$

da cui

$$\left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| = \left| 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \right| = \left| \frac{1 - x^n}{1 - x} \right| . \tag{2}$$

Supponendo $|x| < 1$ si ha

$$1 - |x|^n < |1 - x^n| < 1 + |x|^n$$

e quindi

$$\frac{1 - |x|^n}{|1 - x|} < \left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| < \frac{1 + |x|^n}{|1 - x|}$$

dalle quali diseguaglianze segue che

$$\lim_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{a_n(x)} \right| = \frac{1}{|1 - x|} .$$

Il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})^n \,.\, y^n \tag{1'}$$

è quindi, posto $x = u + iv$,

$$R(u, v) = |1 - x| = \sqrt{(1 - u)^2 + v^2} , \tag{3}$$

vale a dire *il raggio di convergenza è uguale alla distanza del punto x dal punto* 1 *dell'asse reale.*

Dalle (2) segue poi per $|x|=1$,

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}|=n$$

e in conseguenza

$$\lim_{n=\infty}|\sqrt[n]{a_n(x)}|=\infty,$$

cioè in tutti i punti della circonferenza di raggio *uno* abbiamo

$$R(u,\ v)=0.$$

Se poi $|x|>1$, dalla diseguaglianza

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}>\frac{|x|^n-1}{|1-x|}$$

risulta ancora, che

$$\lim_{n=\infty}|\sqrt[n]{a_n(x)}|=\infty$$

e quindi $R(u,\ v)=0$ in tutti i punti x esterni al cerchio di raggio eguale all'unità.

Si può intanto concludere che se $|x|>1$, la serie (1) è *divergente.*

Consideriamo un cerchio $(0,\ \rho)$, essendo $\rho<1$. Quando il punto x descrive la circonferenza di questo cerchio, in virtù della (3) il minimo valore del raggio di convergenza $R(u,\ v)$ lo si ha manifestamente allorquando il punto x cade sull'asse reale alla destra dell'origine, nel qual caso si ha

$$|1-x|=1-|x|=1-\rho;$$

se poi x è un punto qualunque interno al circolo di raggio ρ, abbiamo evidentemente

$$R(u,\ v)=|1-x|>1-\rho,$$

per cui il *minimo* valore dei raggi di convergenza della serie (1') nel cerchio di raggio $\rho<1$ (contorno incluso) è

$$r(\rho)=1-\rho. \tag{4}$$

Poichè l'equazione $1-\rho=\rho$ è soddisfatta da $\rho=\frac{1}{2}$, è chiaro che il numero r definito al § 1 è nel nostro caso eguale a $\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}\cdot$ Posto $x=\rho(\cos\vartheta+i\operatorname{sen}\vartheta)$ si ha dalla figura

$$|1-x|^2=1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta$$

da cui, tenuto conto della (3),

$$r(\rho,\ \vartheta) = |\,1 - x\,| = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\,\rho \cos \vartheta}\,, \tag{4'}$$

che è l'espressione del raggio di convergenza in coordinate polari, allorquando il punto $(\rho,\ \vartheta)$ è interno al circolo $(0,\ 1)$.

L'equazione $r(\rho,\ \vartheta) = \rho$, ossia per la (4'), la

$$\rho \cos \vartheta = \frac{1}{2} \tag{5}$$

ci dà il luogo dei punti interni al circolo di raggio *uno*, nei quali il raggio di convergenza della serie (1') è uguale alla distanza dell'origine dai punti stessi. L'equazione (5) rappresenta una retta parallela all'asse v passante pel punto di mezzo C del segmento compreso fra l'origine e il punto $(1,\ 0)$. Questa

retta divide il piano in due parti tali, che nei punti del semipiano alla sinistra, rispetto a chi guarda la figura, si ha $|1-x|>|x|$, e nei punti del semipiano alla destra $|1-x|<|x|$.

Dal fin qui detto segue, che la serie (1) è convergente nei punti x, che sono ad un tempo interni al circolo (0, 1) e situati alla sinistra della retta (5). Concludiamo quindi, che la *stella S di convergenza* della serie (1) è la regione del semipiano a sinistra compresa fra il cerchio (0, 1) e la retta (5) e, dalle considerazioni svolte risulta altresì, che la stella S abbraccia l'intiero campo di convergenza della serie (1).

Indicando, come nel § 1, con r_ϑ la funzione mediante la quale abbiamo definito la stella S, è evidente, nel caso attuale, che i suoi valori sono dati, tenuto conto della (5), da

$$r_\vartheta = \frac{1}{2\cos\vartheta}, \text{ negli intervalli } \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right), \text{ esclusi gli estremi } \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3};$$

e da

$$r_\vartheta = 1 \text{ per tutti i valori di } \vartheta \text{ dell'intervallo } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \text{ inclusi gli estremi.}$$

Vediamo ora di determinare la funzione ρ_ϑ, che definisce (§ 1) la stella Σ. Coi punti $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $C'\left(0, \frac{1}{2}\right)$ come centri, descriviamo due cerchi di raggio $\frac{1}{2}$; essi si tagliano, oltrechè nell'origine, in un punto M della retta AB (v. figura) ed è evidente, che la retta OM forma con l'asse u un angolo eguale a $\frac{\pi}{4}$. Supponiamo prima di tutto ϑ appartenente all'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\text{escluso } \frac{\pi}{4}\right)$ e sia P il punto d'incontro del raggio corrispondente colla retta AB. Sia un numero razionale e positivo $\alpha < \overline{OP}$; si avrà intanto, per le considerazioni precedenti, $r(\alpha, \vartheta) > \alpha$; d'altronde si vede subito dalla figura, che $r(\alpha, \vartheta)$ è il *minimo* valore della funzione $r(\rho, \vartheta)$ nell'intervallo $(0, \alpha)$, e quindi (§ 1) attribuiremo il numero α ad una prima classe P_1, alla quale apparterranno quindi tutti i numeri razionali positivi minori di $\overline{OP}$. Se poi è $1 > \alpha > \overline{OP}$, abbiamo $r(\alpha, \vartheta) < \alpha$, e poichè $r(\alpha, \vartheta)$ è ancora il minimo valore della funzione $r(\rho, \vartheta)$ nell'intervallo $(0, \alpha)$, attribuiremo α ad una seconda classe P_2 ed alla stessa classe attribuiremo il numero 1 ed ogni numero razionale positivo maggiore dell'unità.

Siccome poi, per quanto abbiamo visto, posto

$$\overline{OP} = \rho_\vartheta, \text{ è } r(\rho_\vartheta, \vartheta) = \rho_\vartheta = \overline{OP},$$

si conclude che

$$\rho_\vartheta \equiv (P_1, P_2).$$

Il punto P essendo situato sulla retta (5) si avrà $\rho_\vartheta = \frac{1}{2\cos\vartheta}$; per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ si vede poi facilmente che è ancora $\rho_\vartheta = \frac{1}{2\cos\vartheta}$. Suppongasi $\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, e sia N il punto d'incontro del corrispondente raggio col circolo di raggio $\frac{1}{2}$ e di centro C, e Q il punto che il raggio stesso ha in comune col cerchio di centro C' e raggio $\frac{1}{2}$. Se α è un numero razionale e positivo tale che $\alpha < \overline{ON}$, si ha $r(\alpha, \vartheta) > \alpha$ e d'altronde risulta evidente dalla figura, che $r(\alpha, \vartheta)$ è altresì il minimo valore della funzione $r(\rho, \vartheta)$ nell'intervallo $(0, \alpha)$, per cui attribuiamo α alla classe P_1. Se il numero α è tale, che si abbia $\overline{OQ} > \alpha > \overline{ON}$, il valor minimo della funzione $r(\rho, \vartheta)$ nell'intervallo $(0, \alpha)$ è uguale alla distanza del punto $(1, 0)$ dal punto N, ovverosia è uguale ad $\overline{OQ} > \alpha$ e quindi attribuiremo α ancora alla classe P_1. Supposto poi $1 > \alpha > \overline{OQ}$, poichè il valor minimo della funzione $r(\rho, \vartheta)$ nell'intervallo $(0, \alpha)$ è ancora $\overline{OQ} < \alpha$, ne concludiamo che α apparterrà alla classe P_2 ed alla medesima classe attribuiremo il numero 1 e tutti i numeri razionali positivi maggiori dell'unità. Da tutto ciò si scorge che, posto $\overline{OQ} = \rho_\vartheta$, si ha $\rho_\vartheta \equiv (P_1, P_2)$, ove, come risulta immediatamente dalla figura,

$$\rho_\vartheta = \operatorname{sen} \vartheta$$

e questa espressione di ρ_ϑ vale per tutti i valori di ϑ dell'intervallo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (estremi esclusi).

In fine si vede facilmente, che nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, (estremi inclusi), si ha

$$\rho_\vartheta = 1.$$

Analogamente si vede che è

$\rho_\vartheta = 1$ nell'intervallo $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; $\left(\text{incluso l'estremo } \frac{3\pi}{2}\right)$;

$\rho_\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta$ » » $\left(3\frac{\pi}{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$, (estremi esclusi);

$\rho_\vartheta = \frac{1}{2\cos\vartheta}$ » » $\left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right)$, (inclusi gli estremi).

La funzione ρ_ϑ è così pienamente determinata nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e si vede da tutto ciò, che la stella Σ si ottiene dalla stella S escludendo da questa le porzioni ombreggiate in figura.

2) Si consideri ancora la serie

$$\sum_0^\infty {}_n (1-x)^n \cdot x^n. \tag{1}$$

Abbiamo

$$a_n(x) = (1-x)^n,$$

da cui

$$|\sqrt[n]{a_n(x)}| = |1-x| = \sqrt{(1-u)^2+v^2},$$

avendo posto $x = u + iv$.

Segue che il raggio di convergenza della serie

$$\sum_0^\infty {}_n (1-x)^n \cdot y^n, \tag{2}$$

per ogni valore di x, è

$$R(u, v) = \frac{1}{|1-x|} = \frac{1}{\sqrt{(1-u)^2+v^2}}. \tag{3}$$

Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = x(1-x), \tag{4}$$

il cui modulo è $\sqrt{\{(1-u)^2+v^2\}(u^2+v^2)}$; per quanto si è visto nel § 2, la curva

$$((1-u)^2+v^2)(u^2+v^2) = 1 \tag{5}$$

rappresenta il luogo dei punti in cui la (4) assume valori il cui modulo è uguale all'unità. Questa curva è, come è facile constatare, una ovale di Cassini avente per fuochi i punti (0, 0), (1, 0). Nei punti interni alla curva si ha

$$|\varphi(x)| = |x(1-x)| < 1$$

da cui

$$\frac{1}{|1-x|} > |x|,$$

e in quelli esterni

$$|\varphi(x)| = |x(1-x)| > 1,$$

donde

$$\frac{1}{|1-x|} < |x|,$$

Possiamo pertanto concludere, che la serie (1) *converge* nella regione interna alla curva (5), mentre *diverge* nella regione esterna: la *stella di convergenza* è in conseguenza la regione del piano limitata dalla curva stessa. Se si descrive, col centro nell'origine, il cerchio di raggio *uno*, si vede facilmente, che la stella Σ si ottiene dalla ovale togliendo la regione di questa esterna al cerchio (0, 1).

Se nella (1) si pone $x(1-x) = z$, si ha

$$\sum_0^\infty {}_n (1-x)^n x^n = \sum_0^\infty {}_n z^n = \frac{1}{1-z}$$

per tutti i valori di z tali che $|z| < 1$. La (1) rappresenta quindi la funzione razionale

$$f(x) = \frac{1}{1-x+x^2};$$

e, da questa espressione, segue che l'elemento della funzione stessa relativo all'origine, ha per raggio di convergenza l'unità.

3) Più generalmente si consideri la serie

$$\sum_0^\infty {}_n (2c-x)^n \cdot x^n, \tag{1}$$

c essendo un numero reale e positivo.

È facile vedere che se è $c > 1$, il *campo di convergenza* della (1) è limitato da due ovali di Cassini coi fuochi (0, 0), ($2c$, 0); se è $c = 1$, il campo stesso ha per contorno una lemniscata di Bernoulli; e se in fine è $c < 1$, da un'unica ovale di Cassini. Nel primo caso la *stella di convergenza* è limitata dall'ovale relativa al fuoco (0, 0); nel secondo è rappresentata dal cappio, che contiene quest'ultimo punto ed il terzo caso si presenta come quello dell'esempio precedente. In ogni caso si vede facilmente che la stella Σ

si ottiene dalla stella S trascurando da questa la porzione esterna al circolo $\left(0, \frac{1}{2c}\right)$. Se si trasporta l'origine delle coordinate nel punto $(2c, 0)$ o, ciò che torna lo stesso, si aggiunge all'affisso di ciascun punto la costante $-2c$, la serie (1) non cambia; dal che segue, che la (1) rappresenta la stessa funzione in un campo identico al precedente, che contiene il punto $(2c, 0)$. I due campi sono simmetricamente disposti rispetto al punto c dell'asse reale.

Padova, maggio 1900.

Sulle superficie razionali di 5.° ordine.

(*Di* Angelo Pensa, *a Savigliano.*)

In seguito ad importanti e notissimi lavori dovuti a Clebsch, Cremona, Sturm, Nöther,... le superficie razionali dei primi quattro ordini sono, come è noto, tutte conosciute.

Per quelle di 5.° ordine non è così. Se ne conoscono già parecchie, determinate e studiate anche esse da Clebsch (*), Cremona (**), Sturm (***), Nöther (****) e Caporali (*****); di queste (******) non ci occuperemo nel presente lavoro. Ne rimangono però numerose altre da determinare. Fra queste ultime, due furono recentemente studiate dal sig. Montesano in un suo lavoro (*******), nel quale vi è pure un cenno di alcune altre F_5 razionali (********).

(*) Clebsch, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 15. — *Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächen.* — *Abbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen.* Math. Ann., III (1871).

(**) Cremona, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen.* Math. Ann., IV (1871).

(***) Sturm, *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden.* Math. Ann. IV.

(****) Nöther, *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Math. Annalen, III (1870). — *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln.* Göttinger Nachrichten, 1871.

(*****) Caporali, *Sulla superficie del 5.° ordine dotata di una curva doppia di 5.° ordine.* Annali di Matematica, ser. II, tom. 7 (1875). — *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane*, nel volume *In Memoriam Dominici Chelini* (1879), oppure nelle *Memorie di Geometria* di E. Caporali.

(******) Tranne per quelle determinate dal sig. Nöther nella sua 2.ª Memoria: *Ueber die algebraischen Functionen...* (Götting. Nachr. 1871), e nel vol. 3 dei Math. Ann., pag. 558, 559.

(*******) *Su alcune superficie omaloidiche di 4.° e 5.° ordine, prive di linee multiple.* Rendic. della R. Accad. d. Scienze Fis. e Matem. di Napoli (1900).

(********) V. in fine la « Nota addizionale ».

Scopo della presente Memoria (*) è la determinazione di tipi di F_5 razionali ancora sconosciuti, le cui singolarità non sono costituite tutte da linee multiple ordinarie. Per questo, la via da me tenuta è quella tracciata dall'importante teorema del sig. Castelnuovo, sulle superficie razionali (**).

Noterò che ho fatto qui largo uso del concetto di singolarità esposto in una recente Memoria, che io supporrò nota al lettore, dovuta al professore C. Segre (***); e terminerò esprimendo allo stesso prof. Segre, con vivissima riconoscenza, i più sentiti ringraziamenti, perchè a Lui io debbo, non solo l'essermi occupato di questo argomento, ma ancora numerose osservazioni, ed utilissimi consigli.

---

1. È noto che uno dei metodi più importanti per stabilire la razionalità di una superficie di dato ordine, e di cui si conoscano le singolarità (curve e punti multipli), è quello che si fonda sul seguente teorema (****):

Affinchè una superficie F_n, di ordine n, sia razionale, occorre e basta che il suo genere numerico p_n (Flächengeschlecht) sia uguale a zero, e che manchino le superficie di ordine $2(n-4)$ biaggiunte ad essa, all'infuori di quelle che contengono tutta la superficie primitiva (cioè deve essere $P=0$).

Volendo occuparci del caso particolare $n=5$, occorrerà, per poter applicare il precedente teorema, far precedere qualche considerazione intorno all'influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico p_n, e sul bigenere P (*****), affinchè si possa stabilire di quali singolarità debbano essere dotate le superficie da determinare.

(*) Che non è altro se non la mia dissertazione di laurea, di una parte della quale è costituito il mio opuscolo: *Sull'influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P, con applicazioni alla determinazione di F_5 razionali* (Mondovì, 1900), dissertazione presentata alla R. Università di Torino nel giugno del 1899, ed ora alquanto modificata ed estesa.

(**) G. Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero.* Memorie della Società Italiana di Scienze, serie III, vol. X (1896).

(***) C. Segre, *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.* Annali di Matematica, serie II, tom. 25 (1896).

(****) Castelnuovo, loc. cit.

(*****) È noto che (cfr. p. es. la Memoria: *Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques*, di G. Castelnuovo ed F. Enriques, nei Math. Annalen, tom. 48,

2. Si consideri anzitutto una trasformazione quadratica birazionale fra due spazi Σ e Σ', la quale abbia come elementi fondamentali in Σ un punto A ed una conica σ, riducibile o no, in un piano non passante per A; diciamo A' e σ' il punto e la conica fondamentali in Σ', Π il piano di σ, Π' quello di σ'. È noto che in questa trasformazione ai punti di Σ infinitamente vicini ad A, nelle varie direzioni uscenti da esso, corrispondono i punti di Σ' situati su Π', e la corrispondenza fra quelle direzioni e questi punti è collineare; così ai punti di Σ' infinitamente vicini ad A' corrispondono i punti di Π in Σ.

Si abbia in Σ una superficie F_n di ordine n, avente A per punto s-plo. Supporremo che la conica σ non stia su F_n, ed inoltre, come è possibile, supporremo che incontri questa in $2n$ punti semplici. Di più, se infinitamente vicino ad A su F_n non vi sono linee multiple infinitesime, ma solo vi è un certo numero finito ($\geqq 0$) di punti multipli, supporremo che le generatrici del cono φ_s tangente in O ad F_n, sulle quali stanno questi punti, non incontrino σ; e se infinitamente vicina ad O vi fosse una linea multipla infinitesima λ, essendo ψ il cono formato dalle generatrici di φ_s, sulle quali, infinitamente vicino ad O, stanno i punti della linea λ, supporremo che σ incontri ψ in punti di generatrici generiche.

Allora la trasformata F' di F_n, di ordine $2n-s$ in generale, oltre il punto, od i punti multipli in numero finito od infinito (se ve ne saranno), risultanti dall'applicazione di questa prima trasformazione al punto A di F_n (i quali punti, se in numero finito, saranno fuori di σ', e se invece costituiscono una linea, essa verrà incontrata da σ' in punti generici, per le ipotesi fatte), ed oltre le singolarità corrispondenti a quelle di F_n, fuori del punto fondamentale A di Σ, avrà ancora, come è noto, il punto A' multiplo secondo n, e la conica σ' multipla secondo $n-s$.

---

ai § 21, 26, 27) il *sistema canonico* di una superficie è un sistema invariante per trasformazioni birazionali applicate ad essa; e si ha che *le superficie di ordine* $n-4$, *aggiunte ad una superficie* F_n, *d'ordine n, tagliano su questa il sistema canonico, fuori delle curve multiple e delle curve eccezionali di prima specie.* La dimensione del sistema canonico è pure un invariante per la superficie F_n e quindi tale è pure la dimensione del sistema delle superficie di ordine $n-4$ aggiunte ad essa. E si ha che la *dimensione effettiva* di questo sistema, aumentata di un'unità, dà il *genere geometrico* p_g di F_n; mentre la *dimensione virtuale* dello stesso sistema, aumentata di un'unità, dà il *genere numerico* p_n di F_n.

Per ciò che riguarda il carattere P, v. avanti al n. 12.

INFLUENZA SU p_n DI PUNTI MULTIPLI ISOLATI, PRIVI DI LINEE MULTIPLE INFINITESIME.

3. Supponiamo che una superficie F_n abbia un punto O s-plo, isolato, tale che il cono tangente in esso alla superficie non abbia che generatrici semplici, ad incontro μ-punto ($\mu \geqq s+1$) con F_n in O, e generatrici ν-ple ($\nu \geqq 1$) aventi in O incontro esattamente $(s+1)$-punto con F_n. Allora, infinitamente vicini ad O su F_n non vi sono punti multipli, nè linee multiple infinitesime (*). Ricordando allora il comportamento delle superficie aggiunte ad una data nei punti multipli ordinari, isolati, e lungo le linee multiple ordinarie di questa (**) si ricava che l'*influenza* (***) di un tal punto su p_n è di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

(*) SEGRE, l. cit.

(**) È noto (Cfr. ENRIQUES: *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, Memorie della Società Ital. di Scienze, s. III, tom. X, n. 31) che, ove la superficie F sia dotata di punti multipli ordinarii isolati, e di curve multiple ordinarie, *una superficie aggiunta ad F è tale che sega un piano generico di S_3 secondo una curva aggiunta alla sezione di F, ed un piano generico per un punto multiplo isolato ordinario O secondo una curva che, insieme ad una retta per O, costituisce una aggiunta alla sezione di F.*

Quindi, nel caso di singolarità ordinarie, si ha; *Se una superficie F non ha altra singolarità che curve multiple ordinarie, degli ordini $h=2, 3,\ldots$, e punti multipli ordinari, isolati, degli ordini $k=2, 3,\ldots$, le superficie aggiunte ad F sono completamente determinate dalle condizioni di contenere quelle curve colle moltiplicità $h-1$, e quei punti colle moltiplicità $k-2$.*

Per quanto riguarda l'*influenza* su p_n di linee multiple ordinarie di una superficie F, si potrà ricorrere alle *formole di postulazione* di NÖTHER (Annali di Matematica, s. II, vol. 5), di cui ci serviremo più volte nel seguito.

(***) Se una superficie F_m di ordine m è priva di punti multipli e di linee multiple, per essa è $p_n = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$. Se, imponendo a questa superficie di avere un certo sistema di punti multipli e linee multiple, il suo genere numerico diventa $p_n = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - \chi$, diremo che *$\chi$ è l'influenza su p_n, per la F_m, di quel sistema di punti multipli e di linee multiple.*

unità (*). In particolare un punto doppio ordinario isolato non ha alcuna influenza su p_n.

4. Sia ora F_n una superficie di ordine n, che, riferita ad un sistema di coordinate cartesiane non omogenee, abbia un'equazione del tipo seguente:

$$F_n \equiv \varphi_s + \varphi_{s+1} + \varphi_{s+2} + \cdots + \varphi_n = 0,$$

ove le φ_i siano forme delle x, y, z, di ordine i, e tali inoltre che x ed y compaiano complessivamente in tutti i termini di φ_s, $\varphi_{s+1}, \ldots, \varphi_{s+s'-1}$, rispettivamente ai gradi s', $s'-1, \ldots, 1$ (essendo $s' \leq s$).

Una tal superficie ha infinitamente vicino all'origine O delle coordinate un punto multiplo secondo s' (nella direzione dell'asse delle z) (**).

Per calcolare l'influenza di questa singolarità su p_n, ci varremo del fatto che il valore di p_n per la F_n non differisce da quello calcolato per una sua trasformata qualunque, ottenuta mediante una trasformazione birazionale (***).

Perciò applichiamo alla F_n una trasformazione birazionale spaziale, del tipo di quella considerata al n. 2, scegliendo il punto O di F_n per punto fondamentale isolato di essa trasformazione, nel 1.° spazio.

La trasformata F' di F_n (supposto che questa non abbia altre singolarità che O), sarà di ordine $2n-s$, ed avrà un punto O' s'-plo sul piano Π', fuori di σ'; avrà inoltre un punto n-plo A' (punto fondamentale isolato della trasformazione, nel 2.° spazio Σ'), e la conica σ' $(n-s)$-pla ordinaria. Dalle formule di postulazione di Nöther (****) si ha che l'influenza su p_n di una conica r-pla ordinaria, per una superficie di ordine m, è di

$$\frac{r(r-1)}{2}(2m-2r-3)$$

unità. Quindi il valore di p_n per la F' è

$$p_n = \frac{(2n-s-1)(2n-s-2)(2n-s-3)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} -$$
$$- \frac{s'(s'-1)(s'-2)}{6} - \frac{(n-s)(n-s-1)(2n-3)}{2}.$$

(*) Cfr. la Nota 2.ª: *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweir Variabeln* di Nöther (Göttinger Nachrichten, 1871), pag. 272, caso *a*).

(**) Cfr. Nöther, l. cit., pag. 272, caso *b*); e Segre, l. cit., n. 9.

(***) Zeuthen: *Étude géométrique...*, Mathematische Annalen, tom. 4, 1871. — Nöther: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen*, I, II. Math. Ann., tom. 2-8, 1869-1874. — Enriques: *Introduzione...*, Mem. della Soc. Ital. di Scienze, s. III, tom. X, 1896.

(****) *Annali di Matematica*, s. II, vol. 5.

Ma si ha l'identità (*)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(2n-s-1)(2n-s-2)(2n-s-3)}{6}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\\&\qquad-\frac{(n-s)(n-s-1)(2n-3)}{2}=\\&=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-\frac{s(s-1)(s-2)}{6}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Quindi

$$p_n=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-\frac{s(s-1)(s-2)}{6}-\frac{s'(s'-1)(s'-2)}{6},\quad(2)$$

cioè l'influenza su p_n del punto s-plo O considerato è di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}+\frac{s'(s'-1)(s'-2)}{6}$$

unità (**).

Se il punto singolare O di F_n avesse infinitamente vicino (successivo) un punto s'-plo, al quale fosse infinitamente vicino (successivo) un punto s''-plo ($s \geqq s' \geqq s''$), allora sulla F', il punto s'-plo O' avrebbe infinitamente vicino (successivo) un punto multiplo secondo s''. Quindi, analogamente a quanto abbiamo visto ora, la F' avrebbe

$$p_n=\pi_n-\frac{s''(s''-1)(s''-2)}{6}$$

ove π_n è il valore che avrebbe p_n per la F' quando il suo punto s'-plo O' fosse ordinario, isolato: cioè π_n non è altro che il valore (2) di p_n. Quindi

---

(*) Questa identità, oltre che dalla diretta verificazione, si riconosce vera servendoci della proprietà che ha il genere numerico di una superficie di non variare quando si trasforma birazionalmente la superficie stessa. Se una superficie di ordine n non ha altre singolarità che un punto s-plo isolato, ordinario O, il suo genere numerico sarà espresso dal secondo membro dell'identità da dimostrare; trasformando questa superficie colla trasformazione del n. 2, dopo aver scelto O come punto fondamentale isolato della trasformazione nel 1.° spazio, si otterrà una superficie di ordine $2n-s$, non avente altra singolarità che un punto n-plo isolato, ordinario, ed una conica $(n-s)$-pla ordinaria, in un piano non passante pel punto n-plo. Il genere numerico di questa trasformata sarà espresso dal primo membro della identità da dimostrare, il quale risulta perciò identicamente uguale al secondo.

(**) Nöther: *Ueber die algebraischen Functionen*... (Nachrichten Göttinger, 1871), pag. 272, caso *b*).

l'influenza su p_n del particolare punto s-plo di F_n ora considerato è di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6} + \frac{s'(s'-1)(s'-2)}{6} + \frac{s''(s''-1)(s''-2)}{6}$$

unità.

Si vede che si può così proseguire, estendendo il ragionamento al caso in cui il punto singolare O di F_n consti di un punto s-plo a cui sia successivo, in una certa direzione, un punto s'-plo; ed a questo sia successivo un punto s''-plo, a cui segua un punto s'''-plo, ... e così via ($s \geqq s' \geqq s'' \geqq s''' \geqq \ldots$), essendo questi punti in numero finito. Ma ciò che si è detto per i punti infinitamente vicini ad O in tale direzione, si può ripetere per quelli che fossero infinitamente vicini ad O su F_n in qualunque altra direzione uscente da esso. Così avremo che l'influenza su p_n di un punto s-plo singolare, isolato O, nella cui composizione non entri alcuna linea infinitesima, ma soli punti multipli staccati, è di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6} + \sum_{\nu} \frac{s^{(\nu)}(s^{(\nu)}-1)(s^{(\nu)}-2)}{6}$$

unità, essendo la sommatoria estesa a tutti i punti $s^{(\nu)}$-pli (staccati) infinitamente vicini ad O.

Abbiamo quindi che *se una superficie F_n ha un punto s-plo O, nella cui composizione non entrino linee multiple infinitesime, ma soli punti $O^{(\nu)}$ $s^{(\nu)}$-pli, staccati, le condizioni imposte da questa singolarità alle superficie aggiunte ad F_n, sono che esse abbiano in O un punto* $(s-2)$*-plo, ed in ciascuno dei punti $O^{(\nu)}$ un punto multiplo secondo* $s^{(\nu)} - 2$. (*Essendo* $s \geqq s' \geqq \cdots \geqq s^{(\nu-1)} \geqq s^{(\nu)}$.)

In particolare se il punto s-plo non ha infinitamente vicini ad esso che eventualmente punti doppi in numero finito, l'influenza sua su p_n è di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

unità, come se fosse ordinario, isolato.

Se poi fosse anche $s = 2$, il punto O non avrebbe influenza alcuna su p_n.

Influenza su p_n di un punto multiplo isolato nella cui composizione entri una linea multipla infinitesima.

5. Passiamo ora al caso in cui una superficie F_n di ordine n abbia un punto s-plo isolato O, infinitamente vicino al quale vi siano, in direzioni diverse, *infiniti* punti multipli; vi sia cioè, una linea infinitesima λ, di ordine h, multipla secondo s'. Supporremo evidentemente che sia

$$\left.\begin{array}{l} n \geqq s + s' \\ s' h \leqq s. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Supporremo poi che sulla linea λ non vi sia alcun punto la cui multiplicità per F_n sia maggiore di s'; e anzitutto considereremo il caso in cui non vi sia su λ alcun punto, infinitamente vicino al quale, oltre i punti della linea λ vi siano punti multipli per la superficie. Supporremo pure, per semplicità, che la F_n non abbia altre singolarità oltre il punto O. Trasformiamo la F_n servendoci di una trasformazione del tipo considerato al n.° 2, e supponiamo che il punto fondamentale A di questa, nel 1.° spazio Σ, coincida col punto O di F_n. La trasformata F', di ordine $2n - s$, oltre un punto A' n-plo ordinario, isolato, ed una conica $(n - s)$-pla ordinaria σ', avrà una linea s'-pla λ' (corrispondente a λ), di ordine h, nel piano di σ'. Indicando quindi con χ l'influenza della linea λ' su p_n per F', il genere numerico di questa sarà

$$p_n = \frac{(2n - s - 1)(2n - s - 2)(2n - s - 3)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{(n-s)(n-s-1)(2n-3)}{2} - \chi,$$

ossia, per l'identità (1)

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - \frac{s(s-1)(s-2)}{6} - \chi.$$

Come è chiaro, χ non è altro che la postulazione di una curva piana λ', di ordine h, multipla secondo $s' - 1$, per una superficie di ordine $2n - s - 4$, la quale abbia nel piano di λ' una conica σ' multipla secondo $n - s - 1$, non facente parte di λ'.

Osserviamo che, come si ricava dalle citate formule di postulazione di Nöther, una linea, intersezione completa di due superficie di ordini p, q ($q \leq p$) rispettivamente, la quale stia su una superficie di ordine m, e sia r-pla per questa, ne riduce il genere numerico di

$$\frac{1}{2}\,\frac{r(r-1)}{2.3}\,p\,q\,\{6m-(2r-1)(p+q)-12\} \tag{4}$$

unità (*), quando sia

$$m \geqq (r-1)p+q+1. \tag{5}$$

Nel nostro caso la condizione (5) essendo soddisfatta per le (3), determineremo χ mediante la (4), osservando però che ciascuno dei $2h$ punti comuni a σ' e λ' influisce su p_n per

$$-\frac{s'(s'-1)}{6}(3n-3s-s'-1)$$

unità (**). Avremo quindi

$$\chi=\frac{s'(s'-1)}{12}\,h\,\{6(s-1)-(2s'-1)(h-1)\}.$$

L'influenza del punto s-plo considerato, su p_n è quindi di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}+\frac{s'(s'-1)}{12}\,h\,\{6(s-1)-(2s'-1)(h-1)\} \tag{6}$$

unità (***).

(*) Si sa inoltre che se su una superficie F_m si ha una linea *doppia* di ordine d, genere μ, dotata di t punti tripli, i quali siano tripli anche per la F_m, l'influenza di questa curva su p_n è di

$$(m-4)d-2t-\mu+1$$

unità.

(**) Poichè risulta dalle *formole di postulazione* di Nöther (n.° 11), che se sopra una superficie Φ il punto O è comune a due curve multiple rispettivamente secondo r_1 ed r_2 per Φ, esso diminuisce l'influenza complessiva delle due curve su p_n di

$$\frac{1}{6}\,r_2(r_2-1)(3r_1-r_2-1)$$

unità, supposto $r_2 \leq r_1$.

(***) Ponendo in questa espressione $s'=s$, $h=1$, si ha quella relativa al caso particolare considerato dal signor Nöther nella 2.ª Memoria: *Ueber die algebraischen Functionen...* (Nachr. Götting., 1871), caso d).

Cerchiamo una interpretazione geometrica di questo risultato, nel caso in cui sia $s' < s$ (*).

È noto (come già ricordammo al n.° 4) che una superficie avente per equazione

$$\Phi_m \equiv \varphi_r + \varphi_{r+1} + \varphi_{r+2} + \cdots + \varphi_m = 0$$

riferita ad un sistema di coordinate cartesiane non omogenee avente per origine un punto O r-plo di essa, φ_i indicando una forma d'ordine i delle x, y, z, ha infinitamente vicino ad O sull'asse delle z un punto r'-plo ($r' \leq r$) quando x ed y compaiano complessivamente ai gradi r', $r'-1$, $r'-2, \ldots, 1$ rispettivamente in $\varphi_r, \varphi_{r+1}, \varphi_{r+2}, \ldots, \varphi_{r+r'-1}$, cioè quando la tangente a Φ_m in O, sulla quale si trova il punto r'-plo O' infinitamente vicino ad O, sia multipla secondo r', $r'-1$, $r'-2, \ldots, 1$, rispettivamente pei coni $\varphi_r = 0$, $\varphi_{r+1} = 0$, $\varphi_{r+2} = 0, \ldots, \varphi_{r+r'-1} = 0$, e questa è condizione necessaria e sufficiente.

Quindi, perchè una tal superficie abbia infinitamente vicino ad O una linea infinitesima l di ordine k, multipla secondo r', se $\psi_k = 0$ è il cono formato dalle tangenti in O, sulle quali stanno i punti di l, occorre e basta che i coni $\varphi_r = 0$, $\varphi_{r+1} = 0, \ldots, \varphi_{r+r'-1} = 0$ contengano il cono $\psi_k = 0$ come parte multipla rispettivamente secondo r', $r'-1, \ldots, 1$.

Ritorniamo ad F_n; e consideriamo una superficie avente nel punto O di F_n un punto $(s-2)$-plo isolato, ordinario; cerchiamo poi il numero delle condizioni che si impongono ad essa, volendo che abbia infinitamente vicino ad O la linea λ, multipla secondo $s'-1$. Supporremo perciò

$$s' < s.$$

Il numero cercato sarà uguale alla somma delle condizioni lineari, distinte, che vengono imposte rispettivamente ad una curva piana di ordine $s-2$ perchè abbia come parte $(s'-1)$-pla una *data* curva piana di ordine h (nel piano della prima); ad una curva (nello stesso piano delle precedenti) di ordine $s-1$, perchè abbia come parte $(s'-2)$-pla la stessa curva di ordine h; ad una curva, sempre nello stesso piano, di ordine s, perchè abbia come parte $(s'-3)$-pla la stessa curva di ordine h; ecc., ed infine, ad una curva, pure di quel piano, di ordine $s+s'-4$, perchè abbia come parte

(*) Il caso $s' = s$, pel valore particolare $s = 2$, è considerato alla fine del presente numero.

semplice la stessa curva di ordine h. Ora, questo numero di condizioni è

$$h(s'-1)(s-2)-(s'-1)\left[\frac{(h-1)(h-2)}{2}-1\right]-$$
$$-h^2[1+2+3+\cdots+(s'-2)]+$$
$$+h(s'-2)(s-1)-(s'-2)\left[\frac{(h-1)(h-2)}{2}-1\right]-$$
$$-h^2[1+2+3+\cdots+(s'-3)]+$$
$$+h(s'-3)s-(s'-3)\left[\frac{(h-1)(h-2)}{2}-1\right]-$$
$$-h^2[1+2+3+\cdots+(s'-4)]+$$
$$+\cdots\cdots\cdots+$$
$$+h.(s+s'-4)-\left[\frac{(h-1)(h-2)}{2}-1\right]=$$
$$=\frac{s'(s'-1)}{12}h[6(s-1)-(2s'-1)(h-1)].$$

Questo numero non è dunque altro che χ.

Potremo quindi dire che *se una superficie F_n ha un punto s-plo O a cui sia infinitamente vicina una linea infinitesima λ, multipla secondo s' ($<s$), le superficie aggiunte ad F_n hanno O per punto $(s-2)$-plo, e λ per linea infinitesima $(s'-1)$-pla* (*).

(*) Direttamente questo si può dimostrare così. Sia

$$\Phi_{n-4}\equiv\psi_{s-2}(x,y,z)+\psi_{s-1}(x,y,z)+\ldots+\psi_{n-4}(x,y,z)=0,$$

in coordinate non omogenee, una superficie di ordine $n-4$, avente il punto 0, che assumiamo per origine delle coordinate, per punto $(s-2)$-plo. Si applichi ad essa la trasformazione $(x=x'z', y=y'z', z=z')$; sarà $\Phi'\equiv\psi_{s-2}(x',y',1)+z'\psi_{s-1}(x',y',1)+\ldots=0$ la superficie trasformata. Questa (se $\theta_h(x,y,z)=0$ è il cono formato dalle tangenti in 0 ad F_n, su cui stanno i punti della linea infinitesima s'-pla, successiva ad 0, di ordine h) deve avere la linea $[\theta_h(x',y',1)=0,\ z'=0]$ per linea $(s'-1)$-pla, affinchè Φ_{n-4}

Se sulla linea λ vi fossero dei punti O' (in numero finito) i quali avessero infinitamente vicino, oltre quelli di λ, dei punti O''_i (in numero finito) multipli secondo s''_i, si avrebbe facilmente, con trasformazioni quadratiche, che le superficie aggiunte alla data avrebbero quei punti O''_i multipli secondo $s''_i - 2$; e analogamente avverrebbe per tutti i punti multipli, staccati, infinitamente vicini a questi, e così di seguito.

Consideriamo in particolare un *tacnodo* (*) di superficie. Esso consta di un punto doppio a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, a cui segue ancora un punto doppio.

La sua influenza su p_n per una superficie, si ha ponendo nella (6) (che vale qualunque sia $s' \leqq s$)

$$s = 2, \quad s' = 2, \quad h = 1.$$

Si ha così che *un tacnodo isolato di superficie influisce su p_n per una unità*, e quindi *se O è un tacnodo per una superficie F, esso è semplice per le aggiunte ad F* (**).

---

sia aggiunta ad F_n. Perchè ciò avvenga, dovranno

$$\psi_{s-2}(x', y', 1), \ \psi_{s-1}(x', y', 1), \ldots, \ \psi_{s+s'-4}(x', y', 1)$$

contenere come parte $(s'-1)$-pla, $(s'-2)$-pla, ..., semplice, rispettivamente, il fattore $0_h(x', y', 1)$. Per le forme che vengono ad assumere, in conseguenza,

$$\psi_{s-2}(x, y, z), \ \psi_{s-1}(x, y, z), \ldots, \ \psi_{s+s'-4}(x, y, z),$$

risulta provata l'asserzione.

(*) Cfr. ZEUTHEN, Math. Ann. IX, 1876, pag. 321; e SEGRE, l. cit., n.° 16.

(**) Cfr. NÖTHER: *Ueber die Algebraischen Functionen*... (Göttinger Nachr., 1871), caso *d*), e CASTELNUOVO: *Sulle superficie di genere zero*, n.° 15.

Influenza su p_n di qualche punto singolare non isolato, e di qualche linea multipla non ordinaria.

6. Si consideri una superficie F_n avente una linea s-pla ordinaria λ, sulla quale stia un punto O (semplice per λ), s-plo per F_n, tale che infinitamente vicino ad esso sulla superficie vi sia una retta infinitesima l, s'-pla ($s' \leqq s$, $s + s' \leqq n$), senz'altro. Trasformiamo F_n colla solita trasformazione, scegliendo O per punto base isolato nel 1.° spazio. Sia λ' la linea di F' (trasformata di F_n) corrispondente a λ, ed l' la retta di π' (ritenendo le notazioni del n.° 2) corrispondente ad l. La l', s'-pla per F', incontrerà λ' in un punto P'. La F' avrà:

$$p_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - \chi - \theta,$$

ove θ è uguale alla influenza di λ su p_n per la F_n, nel caso che il punto O non avesse infinitamente vicino, oltre i punti di λ, alcun altro punto multiplo, e χ è l'incremento di essa, dovuto ad l.

Allora, tenendo conto del punto P', e dei due punti d'incontro di l' con σ', si ottiene, procedendo come in un caso analogo al n.° 5,

$$\chi = \frac{s'(s'-1)(s'-2)}{6}. \tag{7}$$

Questo è *l'incremento prodotto nell'influenza di λ su p_n, dal punto O* (*), cioè dalla retta infinitesima s'-pla l, infinitamente vicina ad O.

Per $s' = 2$ si ha $\chi = 0$, cioè *se sopra una linea s-pla ordinaria λ vi è un punto O, s-plo per F_n, e semplice per λ, infinitamente vicino al quale, oltre i punti di λ, vi sia una retta doppia infinitesima, le superficie aggiunte alla data si comportano in O come se esso fosse un punto generico di λ.*

(*) Se una linea λ ha un'influenza Δ su p_n per una F_n, e se, imponendo a λ di avere in un suo punto O una singolarità superiore a quella dei suoi punti generici, l'influenza di λ su p_n diventa $\Delta + \tau$, diremo che τ è l'*incremento prodotto dal punto singolare O nell'influenza di λ su p_n.*

In particolare, per $s = 2$, si ha che *un tacnodo su una linea doppia ordinaria non altera l'influenza di questa sul genere numerico della superficie.*

7. Sopra una superficie F_n vi sia una linea cuspidale priva di *punti chiusi* (*). *Le superficie aggiunte ad F_n si comportano lungo la linea cuspidale allo stesso modo che se questa fosse una linea doppia nodale.* Infatti, una superficie aggiunta ad F_n non differisce, per quanto riguarda il suo comportamento lungo le linee multiple di F_n, da una superficie subaggiunta (**), cioè da una superficie la quale tagli, su ogni piano generico, una curva aggiunta alla sezione di F_n fatta dallo stesso piano. Ora, le curve aggiunte alla sezione piana di F_n, per quanto riguarda le cuspidi ordinarie, tracce della linea cuspidale di F_n, sono le stesse che si avrebbero se codesti punti fossero doppi ordinari. Quindi le superficie subaggiunte alla data si comportano lungo la linea cuspidale come se questa fosse una linea doppia nodale; lo stesso avverrà per le superficie aggiunte.

Ricordando l'ultima osservazione del numero precedente, e tenendo presente il risultato ora ottenuto, si ha che *se una superficie F ha una linea cuspidale λ, sulla quale vi sia un certo numero finito* ($\geqq 0$) *di punti chiusi per F, le superficie aggiunte alla data sono soggette, per quanto riguarda la linea λ, alla sola condizione di averla per linea semplice* (si comportano cioè nei punti chiusi di λ come nei punti generici di essa) (***).

Osserviamo ora che, come è noto, un *regresso di seconda specie* su una superficie, è costituito da un punto doppio a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, cuspidale, sulla quale stanno 5 punti chiusi per la superficie (****). Da questo, e da quanto precede, risulta che *un regresso di 2.ª specie, di una superficie, ha sul valore di p_n per questa la stessa influenza che vi avrebbe un tacnodo, posto nelle stesse condizioni di esso* (*****), vale a dire *le superficie aggiunte alla data si comportano in un regresso di 2.ª specie di essa, come in un tacnodo.*

(*) Cfr. per questi punti ZEUTHEN, Math. Ann. tom. XI, pag. 479 e seg.[1]; e SEGRE, l. cit., n. 17.

(**) ENRIQUES: *Introduzione...*, n. 17. Cfr. pure CASTELNUOVO ed ENRIQUES: *Récents résultats...*, n. 12 e seg.[1].

(***) Possiamo dunque dire che un tacnodo, tanto se è su una linea doppia nodale, che su una linea cuspidale, non accresce l'influenza di essa su p_n.

(****) Cfr. SEGRE, l. cit., n. 18.

(*****) Cioè influisce su p_n per un'unità se è isolato; e se invece è su una linea doppia nodale o cuspidale, non accresce l'influenza di essa su p_n.

8. Vediamo cosa si ha nel caso in cui tutti i punti di una linea λ siano punti chiusi per F. Sarà λ una linea luogo di tacnodi. Procedendo come nel numero precedente osserviamo che una sezione piana generica f della F ha in ciascun punto A d'incontro del piano di sezione π con λ un punto doppio a cui è infinitamente vicino un ulteriore punto doppio A'; una curva aggiunta ad f avrà dunque A ed A' per punti semplici, cioè avrà A per punto semplice, e per tangente ivi la tangente tacnodale in questo punto ad f. Lo stesso avvenendo per tutti i punti di f analoghi ad A, ed essendo π un piano generico, possiamo concludere che *se una superficie F ha una linea λ luogo di tacnodi, le superficie aggiunte ad essa hanno λ per linea semplice, e per piano tangente in ogni punto di essa quello che, contato due volte, dà il cono tangente ivi ad F.*

E tenendo presente la composizione di un regresso di 2.ª specie, e procedendo come nel caso ora visto, si ottiene che *se λ è una linea luogo di regressi di 2.ª specie per una superficie F, le superficie aggiunte ad F si comportano per rispetto a λ come se questa fosse una linea doppia tacnodale.*

Se la linea λ fosse luogo di oscnodi (*) per F, allora la sezione f di F con un piano generico π avrebbe un oscnodo in ciascuno dei punti A di intersezione di π con λ, dimodochè ad A su f sarebbe successivo un punto doppio A', ed a questo un punto doppio A'', e si avrebbe che *una aggiunta ad F deve essere tagliata da π (in ogni sua posizione) in una curva tale che abbia A, A', A'' pei punti semplici.*

E così si può procedere in altri casi analoghi.

Influenza su p_n di punti singolari superiori al tacnodo.

9. Abbiamo già determinata l'influenza di un regresso di 2.ª specie su p_n (n.° 7): consideriamo ora una superficie F_n dotata di un oscnodo O, senza altra singolarità. È noto che un oscnodo è costituito da un punto doppio a cui sia infinitamente vicina una retta tacnodale (**).

(*) Cfr., per la composizione di un oscnodo, Segre, l. cit., n. 19.

(**) Cfr. Segre, l. cit., n.° 19.

Riferita la F_n ad un sistema di coordinate omogenee, scegliendo O per punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, sarà:

$$F_n \equiv x_4^{n-2} x_1^2 + 2\, x_4^{n-3} x_1 \psi_2 + x_4^{n-4} (\psi_2^2 + x_1 \psi_3) +$$

$$+ x_4^{n-5} (\psi_2 \psi_3 + x_1 \psi_4) + x_4^{n-6} \psi_6 + \cdots + \psi_n = 0$$

ove le ψ_i sono forme di ordine i nelle x_1, x_2, x_3, ed in particolare

$$\psi_2 \equiv b_1 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_1 x_3 + b_4 x_2^2 + b_5 x_2 x_3 + b_6 x_3^2 .$$

Applichiamo ad F_n la trasformazione

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1 x'_4 : x'_2 x'_4 : x'_3 x'_4 : \sigma_2 (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : \sigma_2 (x_1, x_2, x_3).$$

Otteniamo una superficie F'_{2n-2}, di ordine $2n-2$, avente per linea $(n-2)$-pla la conica $[x'_4 = 0, \sigma_2 (x'_1 x'_2 x'_3) = 0]$, e avente, nel piano di questa, la retta $r' (x'_1 = 0, x'_4 = 0)$ per retta doppia tacnodale. Ha poi ancora il punto $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ per punto n-plo isolato ordinario; e non ha altre singolarità.

Poniamo

$$\sigma_2 (x_1, x_2, x_3) \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1 x_3 + a_4 x_2^2 + a_5 x_2 x_3 + a_6 x_3^2 ;$$

e consideriamo una superficie Φ_{2n-6}, di ordine $2n-6$, la quale si comporti come una aggiunta ad F'_{2n-2} nel punto $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$, e lungo la conica $[x'_4 = 0, \sigma_2 (x'_1, x'_2, x'_3) = 0]$, e cerchiamo quante condizioni le si debbano imporre perchè si comporti pure come una aggiunta alla stessa superficie lungo la retta $(x'_1 = 0, x'_4 = 0)$, abbia cioè questa retta come linea semplice, e per piano tangente in ciascun punto di essa quello che, contato due volte, dà il cono tangente nello stesso punto ad F'_{2n-2} (*). Il numero di queste condizioni lineari, distinte, sarà l'*influenza dell'oscnodo* su p_n.

La Φ_{2n-6} avrà quindi per ipotesi il punto $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ multiplo secondo $n-2$, ordinario, isolato, e la conica $[x'_4 = 0, \sigma_2 (x'_1, x'_2, x'_3) = 0]$ multipla secondo $n-3$, e conterrà quindi come parte semplice il cono

(*) In particolare, basterebbe che r' fosse doppia nodale, senz'altro, per la Φ_{2n-6}.

$\sigma_2(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$. Affinchè questa superficie si comporti nel modo detto lungo la retta r', deve anzitutto contenerla almeno come linea semplice, e per questo, data la posizione speciale di r' occorre *una condizione lineare* soltanto. Tale superficie si spezzerà allora nel piano $x'_4 = 0$, nel cono $\sigma_2(x'_1 x'_2 x'_3) = 0$, ed in una superficie residua di ordine $2n - 9$. Avremo quindi

$$\Phi_{2n-6} \equiv x'_4 \sigma_2 (x'_1 x'_2 x'_3) \,.\, \Psi_{2n-9} = 0 \tag{8}$$

ove

$$\Psi_{2n-9} \equiv \sigma_2^{n-5} \chi_1 + x'_4 \sigma_2^{n-6} \chi_2 + x'^2_4 \sigma_2^{n-7} \chi_3 + \cdots + x'^{n-6}_4 \sigma_2 \chi_{n-5} + x'^{n-5}_4 \chi_{n-4}$$

essendo χ_i una forma di ordine i nelle x'_1, x'_2, x'_3, ed indicando con σ_2, semplicemente, la forma $\sigma_2(x'_1, x'_2, x'_3)$.

Siccome la F'_{2n-2} non ha nei punti generici di $x'_1 = x'_4 = 0$ per piano tangente il piano $x'_4 = 0$, così perchè la Φ_{2n-6} si comporti come aggiunta lungo tale retta, occorre e basta che la Ψ_{2n-9} passi per r' (cioè Φ_{2n-6} abbia r' per retta doppia), ossia se $\chi_1 \equiv \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \alpha_3 x'_3$, che

$$\alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = 0. \tag{9}$$

Le condizioni cercate sono quindi 3 in tutto.

Avremo dunque che *un oscnodo isolato di una superficie F influisce sul genere numerico di essa per 3 unità.*

Si può interpretare questo risultato dicendo che *se una superficie F ha un oscnodo in un punto O, una aggiunta ad F ha in O un punto semplice, e tocca ivi il piano che contato due volte costituisce il cono tangente nello stesso punto alla data superficie* (*).

10. Supponiamo che un oscnodo O stia su una linea doppia nodale λ della F_n. Abbia questa, ritenendo le notazioni precedenti, in O $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ per tangente la $x_1 = x_2 = 0$.

La F'_{2n-2} avrà allora, oltre le singolarità dette nel caso precedente, ancora una linea doppia nodale λ' (corrispondente a λ).

Quindi una Φ_{2n-6} che debba comportarsi come una aggiunta alla F'_{2n-2} in tutte le singolarità, esclusa ancora, pel momento, la r', dovrà avere, oltre il punto $(n-2)$-plo $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$, e la conica $(n-3)$-pla $(x'_4 = 0,$

(*) La dimostrazione di questo fatto è analoga a quella di un caso simile, al n. 15, nota prima.

$\sigma_2 = 0$), ancora la λ' per linea semplice; e per queste condizioni si spezzerà nel piano $x'_4 = 0$ ed in una superficie residua. Ne verrà quindi che non occorrerà più imporre ad essa alcuna condizione perchè abbia la r' come retta semplice, dacchè questo avviene già per tutte le rette di $x'_4 = 0$, fra cui sta la r', in conseguenza delle altre condizioni a cui è soggetta. Si ha già perciò una condizione di meno, rispetto al caso precedente (in cui il tacnodo era isolato), da imporre alla Φ_{2n-6} affinchè si comporti pure come aggiunta ad F'_{2n-2} lungo la r'.

Vediamo ora, fra le altre condizioni (9) quali sussistono.

La Φ_{2n-6} anche in questo caso si può porre sotto la forma (8), e siccome deve avere la λ' per linea semplice, questa sarà semplice per la Ψ_{2n-9}, e quindi la sezione di questa superficie con $x'_4 = 0$ consterà della conica $\sigma_2 = 0$, contata $n - 5$ volte, e di una retta pel punto $x'_1 = x'_2 = 0$.

Mancherà perciò il coefficiente α_3. Delle condizioni (9) non rimane quindi da verificare che la

$$\alpha_2 = 0.$$

Dunque *un oscnodo di una superficie, sopra una linea doppia nodale o cuspidale* (*) *di essa, aumenta l'influenza della linea sul genere numerico della superficie di un'unità* (**).

11. Consideriamo su una superficie F_n un punto doppio O a cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, nodale, sulla quale vi sia un oscnodo O'; e cerchiamo l'influenza di questa singolarità su p_n.

Trasformando F_n con una trasformazione birazionale del tipo di quella del n.° 2, si ottiene una F'_{2n-2} la quale, oltre le singolarità solite, cioè un punto n-plo, ed una conica $(n-2)$-pla, ha, nel piano di questa, una retta doppia nodale r', su cui sta un oscnodo. E sappiamo (n.° 10) che questo oscnodo accresce di 1 unità l'influenza che la r' avrebbe su p_n per la F'_{2n-2} se su

---

(*) Pel n.° 7.

(**) Se O è un oscnodo ed r' è la retta tacnodale infinitesima, infinitamente vicina ad O, si sa che ogni punto di r' ha infinitamente vicino una retta doppia infinitesima; ma vi sono però fra essi sei punti singolari O'_i sulla cui retta doppia infinitesima, infinitamente vicina r''_i, sta un punto O''_i, a cui segue ancora una retta doppia r''', ed a questa un punto doppio. Cioè i punti O''_i sono tacnodi sulle rette doppie r''_i. Ma è noto (n.° 6) che essi non alterano l'influenza delle r''_i su p_n, e quindi i punti O'_i non alterano quella di r'. È per questo che nel calcolo precedente dell'influenza di un oscnodo su p_n non abbiamo tenuto conto di tali punti singolari.

di essa non ci fosse cotesto punto. Cosicchè il sistema complessivo costituito dalla retta doppia r', e dall'oscnodo su di essa, influisce per 2 unità su p_n, e tale è quindi l'influenza del punto doppio singolare O di F_n su p_n (*).

Per le considerazioni con cui si chiude il n.° 7 si ha che l'influenza su p_n di un regresso di 2.ª specie O è uguale a quella di un semplice tacnodo, e pel n.° 10 si ha che l'incremento prodotto in quest'influenza dalla presenza di un oscnodo O' sulla retta cuspidale infinitesima r', infinitamente vicina ad O è la stessa che se r' fosse nodale (**). Avremo dunque che *un punto doppio isolato di una F_n, a cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima nodale o cuspidale, su cui stia un oscnodo, influisce sul valore di p_n per 2 unità.*

(*) Per avere una verificazione di questo risultato, nel caso in cui sia $n = 4$, potremo servirci dal fatto, riconosciuto dal sig. A. BERRY nel suo lavoro: *Sur les surfaces de quatrième degré qui admettent une intégrale de differentielle totale de première espèce* (Comptes Rendus, tom. CXXIX, Sett. 1899), e dal sig. M. DE FRANCHIS nella Memoria: *Le superficie irrazionali di 4.º ordine, di genere geometrico-superficiale nullo* (Rendic. d. Circolo Matem. di Palermo, tom. XIV, 1900), che una F_4 dotata di un punto doppio a cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, sulla quale stia un oscnodo, ha $p_n = -1$: questo ci dice che l'influenza di un tal punto singolare su p_n, per una F_4, è di *due* unità.

La stessa cosa si può inoltre riconoscere (per una F_4) nel modo seguente, comunicatomi dal sig. prof. SEGRE: « Si consideri la trasformazione birazionale quadratica per la quale il sistema omaloidico nel 1.° spazio si compone delle F_2 passanti per una conica γ, e tangenti in un punto A di questa ad un piano fisso σ (passante per la retta a tangente in A a γ). Il sistema omaloidico del 2.° spazio è composto in modo analogo. Ad una F_3 tangente in A a σ, corrisponde una F_4 con un tacnodo. Se la F_3 è un cono, col vertice in un punto generico di σ, la trasformata F_4 acquista un secondo tacnodo nel punto trasformato del vertice. E se il cono cubico F_3 ha il vertice su a, allora, nella trasformata F_4 si avrà un solo punto doppio, limite di due tacnodi infinitamente vicini. Si avrà così (se il cono cubico era generale, e quindi ellittico) una F_4 dotata di un *tacnodo superiore* (e di nessun altro punto doppio), e non razionale, anzi con $p_n = -1$ ».

Questo « tacnodo superiore » non è altro che la singolarità di cui stiamo occupandoci, come si vede esaminando l'equazione della F_4, che in tal modo si viene ad ottenere: equazione che si può scrivere:

$$(x_2 x_4 - x_3^2)^2 + (x_2 x_4 - x_3^2) f_2(x_1, x_2) + x_1 f_3(x_1, x_2) = 0$$

essendo $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ il punto doppio singolare di cui si tratta, ed indicando con f_2, f_3 forme binarie di 2.° e 3.° ordine rispettivamente.

(**) Una F_4 avente un punto doppio O a cui è infinitamente vicina una retta cuspidale, infinitesima r', sulla quale sta un oscnodo O', è stata considerata dal sig. DE FRANCHIS, l. cit., n.° 3, ed indicata ivi con $F_4^{(2,2,1)}$.

Più generalmente, si abbia una F_n avente un punto s-plo O a cui sia infinitamente vicina una retta doppia nodale o cuspidale r' sulla quale stia un oscnodo (*). Ragionando come precedentemente, si vede che l'influenza di questa singolarità su p_n per la F_n è di

$$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}+s$$

unità.

Analogamente si potrebbe calcolare — ciò che non presenta difficoltà — l'influenza su p_n di un punto s-plo a cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, luogo di tacnodi o di regressi di 2.ª specie: ce ne asterremo qui per brevità (**).

Influenza di qualche singolarità di superficie sul bigenere P.

12. È noto che le *curve bicanoniche* (***) sopra un ente algebrico F, doppiamente infinito, formano, se esistono, un *sistema lineare (bicanonico)*; il numero P delle curve bicanoniche linearmente indipendenti, si chiama *bigenere* dell'ente algebrico F.

Si sa poi (****) che ogni curva bicanonica su una superficie F_n di ordine n può ottenersi mediante una superficie di ordine $2(n-4)$ la quale (nella

(*) Per $s>2$, dobbiamo supporre $n>4$, perchè la F_n non si spezzi.

(**) Osserveremo infine che se una linea doppia, nodale o cuspidale λ passa per un punto O, semplice per essa, e triplo, ordinario per la superficie F, il sistema costituito dalla linea doppia λ e dal punto O ha su p_n la stessa influenza che vi avrebbe λ se il punto O avesse per la superficie la stessa singolarità dei punti generici di λ; e di più noteremo che un punto triplo O, a cui sia infinitamente vicino su F una retta doppia nodale o cuspidale r', supposto sopra una linea doppia, nodale o cuspidale λ (essendo O semplice per questa), ne accresce l'influenza su p_n di *un' unità.*

(***) Si ha il teorema: *Se sopra un ente algebrico* ∞^2 *F, il doppio di un sistema lineare irreducibile* $|C|$ *è contenuto nel doppio del proprio sistema aggiunto* $|C'|$, *altrettanto avviene per ogni altro sistema lineare su F; e le curve residue di* $|2C|$ *rispetto a* $|2C'|$, *spogliate delle loro componenti fisse, costituite da punti base per* $|C|$, *o da punti che entrano come parti fisse in* $|C'|$, *non dipendono dal sistema di partenza* $|C|$. Queste sono le *curve bicanoniche sull' ente F.* Cfr. Enriques: *Introduzione...*, n.° 39.

(****) Castelnuovo: *Sulle superficie di genere zero*, n.° 11.

ipotesi di singolarità ordinarie) sia costretta ad avere per linea h-pla ogni linea h-pla di $F (h \geqq 2)$, in guisa però che le sezioni delle due superficie, con uno stesso piano generico, abbiano in comune ancora $h - 2$ punti infinitamente vicini sopra ciascuno degli h rami uscenti dal punto h-plo; e sia costretta inoltre ad avere per punto doppio ogni punto triplo isolato di F, e per punto k-plo ogni punto k-plo isolato di $F (k \geqq 4)$, in guisa però che, nell'ultimo caso, le sezioni delle due superficie con uno stesso piano generico passante per quel punto, abbiamo ancora $k - 4$ punti infinitamente vicini su ciascuno dei k rami uscenti dal punto.

Una siffatta superficie di ordine $2(n-4)$ si dirà *biaggiunta ad* F (*)

13. Consideriamo una superficie F_n, di ordine n, avente una linea cuspidale λ, priva di punti chiusi.

Pel fatto che una superficie biaggiunta di ordine $2(n-4)$ taglia, su ogni piano generico, una curva che si comporta, rispetto alle singolarità della sezione di F_n collo stesso piano, come l'insieme di due curve aggiunte, si riconosce subito che le superficie biaggiunte ad F_n si comportano lungo λ come se questa fosse una linea doppia nodale.

Su λ vi sia ora un punto chiuso O. Trasformiamo F_n colla trasformazione del n.° 2, assumendo il punto base A di Σ in O.

La trasformata F' avrà, nel piano della conica $(n-2)$-pla σ', una retta doppia r', la quale incontrerà la linea λ', trasformata di λ, nel punto di π' corrispondente alla direzione della tangente a λ in O.

La F' avrà

$$P = \frac{(4n-11)(4n-10)(4n-9)}{6} - \tau' - \chi,$$

indicando con τ' l'influenza complessiva di A', σ', λ' su P per F', e con χ quella di r'. I primi due termini del secondo membro dell'ultima uguaglianza

(*) Nell'ipotesi più semplice che la F sia dotata soltanto di una curva doppia, e non abbia punti multipli isolati, potendo però avere dei punti k-pli $(k > 2)$, purchè tali punti siano multipli secondo $\frac{k(k-1)}{2}$ per la curva doppia, le superficie di ordine $2(n-4)$ biaggiunte ad F sono caratterizzate dal fatto di avere per linea doppia la linea doppia di F (Cfr. Castelnuovo, l. cit., nota al n.° 11). Devesi pure notare che l'insieme di due superficie aggiunte di ordine $n-4$ si comporta come una superficie biaggiunta di ordine $2(n-4)$.

valgono

$$\frac{(2n-7)(2n-6)(2n-5)}{6}-\tau,$$

se τ è l'influenza che avrebbe λ su P ove fosse priva di punti chiusi.

Il valore di χ non è altro che la postulazione della retta doppia r' per una superficie Φ' di ordine $4n-12$, che si comporti già come biaggiunta ad F' in tutte le altre singolarità di questa.

Questa postulazione sarebbe, per una superficie generale di quell'ordine, di

$$12n-35$$

unità. Però la Φ' ha σ' per linea $(n-2)$-pla, e le sezioni di F' e Φ' fatte con uno stesso piano generico hanno ancora in comune, sopra ogni ramo uscente da ciascun punto $(n-2)$-plo, intersezione del piano colla conica σ', $n-4$ punti infinitamente vicini. Siccome r' è una retta di F', il piano di σ' è uno dei piani tangenti ad F' in punti di σ', e precisamente nei due punti (almeno) d'incontro di r' e σ'. Sia M uno di questi punti. Considero la sezione di Φ' con un piano generico per r': possiamo ritenere r' come uno dei rami di questa curva sezione, uscente da M. Quindi la sezione ora considerata di Φ' ha su r', oltre il punto $(n-2)$-plo M, altri $n-4$ punti infinitamente vicini ad M (*). In tutto la r' ha $2n-6$ punti comuni con Φ' in M. Così dicasi per l'altro punto d'intersezione di r' e σ'. Allora, per quanto riguarda le intersezioni di r' con Φ' coincidenti in tali due punti di σ', è lo stesso come se r' incontrasse Φ' in una conica multipla per questa superficie secondo $2n-6$. Siccome (**) un punto comune a due linee multiple secondo r_1 ed r_2 $(\leq r_1)$ rispettivamente, riduce la complessiva postulazione di queste, per una superficie, di

$$\frac{1}{6}r_2(r_2+1)(3r_1-r_2+1)$$

unità, così nel nostro caso il punto M (e il suo analogo) ridurrà la postulazione complessiva di σ' ed r' per Φ' di $6n-19$ unità. Ma la r' incontra pure in un punto la linea λ', e per questo punto d'incontro la postulazione complessiva di r' e λ' per la Φ' diminuisce di 5 unità.

(*) Per ciò che fu detto al n.° 12.

(**) V. le *Formole di Postulazione* di Nöther, n.° 11 (Annali di Matem., s. II, tom. 5).

Cosicchè l'influenza di r' su P per F' sarebbe di

$$\chi \equiv 12\,n - 35 - 2\,(6\,n - 19) - 5 = -2$$

unità. Ora, l'essere la postulazione di r' per Φ' di -2 unità, non significa evidentemente altro se non che le condizioni a cui è soggetta la Φ' per le linee σ' e λ' sono già *più che sufficienti* perchè la r' sia doppia per Φ'.

Quindi, siccome l'influenza di r' su P per F' non è altro che il numero ($\geqq 0$) di condizioni lineari, distinte da imporre a Φ' perchè abbia r' come retta doppia, dovremo, nel nostro caso, ritenere questa influenza uguale a zero.

Dunque un punto chiuso su una linea cuspidale per una superficie F_n ha sul valore di P per questa la stessa influenza che i punti generici di quella linea, cioè non accresce l'influenza della linea cuspidale su P. Avremo dunque che *se una superficie F_n ha una linea doppia cuspidale λ, con un certo numero finito di punti chiusi su di essa, le superficie biaggiunte di ordine $2\,(n-4)$ alla F_n hanno λ per linea doppia ordinaria, senz'altro* (*).

14. Consideriamo una F_n avente una linea λ luogo di tacnodi. La sezione f_n di F_n con un piano generico π sarà dotata di un certo numero di tacnodi O (tracce di λ su π). Una superficie biaggiunta di ordine $2\,(n-4)$ deve essere tagliata da π in una curva che si comporti rispetto ad f_n come l'insieme di due curve aggiunte di ordine $n-4$. Ora, queste, se O' è il punto doppio infinitamente vicino ad O su f_n, hanno ciascuno dei punti O, O' per punti semplici; e quindi la curva risultante dall'insieme di due di esse, e perciò anche la sezione di π con una biaggiunta di ordine $2\,(n-4)$ ad F_n, avrà O ed O' per punti doppi, vale a dire questa biaggiunta avrà λ per linea tacnodale, e in ciascun punto di essa avrà per piano tacnodale quello stesso che vi ha la F_n.

Se poi λ fosse luogo di regressi di seconda specie, allora, sulla f_n, ciascuno dei punti doppi O sarebbe un regresso di 2.ª specie. Ma il comporta-

(*) Sappiamo (n. 7) che una superficie aggiunta ad F_n ha λ per linea semplice, senza alcun comportamento speciale nei punti chiusi di essa; e siccome l'insieme di due superficie aggiunte di ordine $n-4$ ad F_n, costituisce una superficie $\Omega_{2(n-4)}$ di ordine $2\,(n-4)$, biaggiunta ad essa, avente λ per linea doppia, senza alcun comportamento particolare nei punti chiusi di essa, così, se le superficie biaggiunte di ordine $2\,(n-4)$, dovessero, oltre ad avere λ per linea doppia, comportarsi in modo speciale, rispetto ai punti generici di λ, in ogni punto chiuso di essa, la $\Omega_{2(n-4)}$ precedentemente considerata non soddisfacendo che alla prima condizione, non potrebbe essere biaggiunta ad F_n. (Cfr. anche la nota al n. 15.)

mento di una curva aggiunta ad una data, in un regresso di 2.ª specie di questa, è identico al comportamento della stessa curva in un tacnodo. Quindi, concludendo, abbiamo che *se una superficie F_n, di ordine n, ha una linea λ luogo di tacnodi o di regressi di 2.ª specie, le superficie biaggiunte ad F_n, di ordine $2(n-4)$, hanno λ per linea doppia, luogo di tacnodi, ed in ciascun punto di λ hanno per piano tacnodale quello che, contato due volte, dà il cono tangente nello stesso punto ad F_n*.

Comportamento delle superficie biaggiunte in qualche punto singolare.

15. Passiamo ora a considerare punti singolari isolati. Sia O un tacnodo isolato per una superficie F_n, che supporremo priva di altre singolarità. Procedendo come nel n.° 13, e ricordando la composizione di un tacnodo di superficie, avremo che sulla trasformata F' di F_n la retta r' (corrispondente ai punti infinitamente vicini ad O su F_n) non incontra più alcuna linea doppia di F' (come avveniva nel caso del n.° 13), ma solo incontra la conica σ'; per cui l'influenza di r' su P per F', cioè l'influenza del tacnodo O su P per F_n è di

$$12n - 35 - 2(6n - 19) = 3$$

unità.

Avremo dunque che *un tacnodo di una superficie F_n influisce sul bigenere di essa per 3 unità,* od anche *le superficie biaggiunte ad F_n, di ordine $2(n-4)$, hanno in O un punto semplice, e toccano ivi il piano che, contato due volte, dà il cono tangente in tal punto alla superficie* (*).

(*) Cfr. Castelnuovo: *Sulle superficie di genere zero*, n.° 15. — La seconda parte di questa proposizione si può dimostrare nel modo seguente — e avremo ancora, nello stesso tempo, una dimostrazione della prima. — Siano

$$F_n \equiv x_4^{n-2} x_1^2 + x_4^{n-3} x_1 \psi_2 + x_4^{n-4} \psi_4 + \ldots + \psi_n = 0,$$

$$\Omega_{2n-8} \equiv \theta_0 x_4^{2n-8} + x_4^{2n-9} \theta_1 + x_4^{2n-10} \theta_2 + \ldots + \theta_{2n-8} = 0$$

(ove ψ_i e θ_i sono forme di ordine i nelle x_1, x_2, x_3) una superficie di ordine n avente nel punto $A_4 (x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ un tacnodo, e priva d'altre singolarità, ed una superficie generale di ordine $2n-8$, rispettivamente. Poniamo $\theta_1 \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Trasformiamole colla trasformazione applicata al n. 9, e riteniamo per F'_{2n-2}, trasformata di F_n,

È noto poi che se su F_n A è un regresso di 2.ª specie, esso consta di un punto doppio a cui è infinitamente vicina una retta doppia cuspidale r, sulla quale stanno 5 punti chiusi. Allora, trasformando F_n colla trasformazione del n.° 2, scelto A per punto base nel 1.° spazio Σ, e tenendo conto in Σ' di un'osservazione del n.° 13, e ritornando in Σ, si ottiene che *l'influenza di un regresso di 2.ª specie di una superficie F_n, sui bigenere P di essa, è uguale a quello di un tacnodo*, e quindi *le superficie biaggiunte, di ordine* $2(n-4)$, *ad F_n si comportano in un regresso di 2.ª specie di essa come in un tacnodo.*

16. Ritorniamo a considerare la superficie F_n del n. 9, dotata in A_4 $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ di un oscnodo, con $x_1 = 0$ per piano oscnodale, senz'altra singolarità. Sia poi

$$\Omega_{2n-8} \equiv \theta_0\, x_4^{2n-8} + x_4^{2n-9}\,\theta_1 + x_4^{2n-10}\,\theta_2 + x_4^{2n-11}\,\theta_3 + \cdots + \theta_{2n-8} = 0$$

(ove θ_i e una forma di ordine i nelle x_1, x_2, x_3, e θ_0 è una costante) una superficie di ordine $2n-8$, generale. Trasformiamo F_n e Φ_{2n-8} colla trasformazione usata al n. 9, e riteniamo per F'_{2n-2}, trasformata di F_n, le notazioni ivi usate. La trasformata di Ω_{2n-8} sarà

$$\Omega'_{4n-16} \equiv \theta_0\, \sigma_2^{2n-8}(x'_1, x'_2, x'_3) + x'_4\, \sigma_2^{2n-9}(x'_1, x'_2, x'_3)\, \theta_1(x'_1, x'_2, x'_3) + $$
$$+ x'^2_4\, \sigma_2^{2n-10}(x'_1, x'_2, x'_3)\, \theta_2(x'_1, x'_2, x'_3) + \ldots = 0.$$

Dovendo questa avere la $x'_1 = x'_4 = 0$ per retta doppia, affinchè la Ω_{2n-8} sia biaggiunta ad F_n, occorrerà che si abbia $\theta_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, — *e così risulta nuovamente provato che è di 3 unità l'influenza di un tacnodo isolato di una superficie sul bigenere di essa.* — Sarà dunque:

$$\Omega'_{4n-16} \equiv \alpha_1\, x'_4\, x'_1\, \sigma_2^{2n-9}(x'_1, x'_2, x'_3) + x'^2_4\, \sigma_2^{2n-10}(x'_1, x'_2, x'_3)\, \theta_2(x'_1, x'_2, x'_3) + \ldots = 0$$

e ritornando in Σ, avremo

$$\Omega_{2n-8} \equiv \alpha_1\, x_1\, x_4^{2n-9} + x_4^{2n-10}\,\theta_2 + \ldots + \theta_{2n-8} = 0,$$

e questa superficie, che è biaggiunta ad F_n, ha il punto A_4 $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ per punto semplice, con $x_1 = 0$ (piano tacnodale di F_n in A_4) per piano tangente in esso.

Osserviamo ancora che la multiplicità d'intersezione in A_4 di F_n e Ω_{2n-8} non varierebbe se quest'ultima, invece di soddisfare alle condizioni ora dette, avesse in A_4 un punto doppio, senz'altro. E quindi, se il punto A_4 stesse su una linea doppia, nodale o cuspidale λ, per F_n, esso sarebbe già doppio per Ω_{2n-8}, semplicemente pel fatto di stare su λ, e non occorrerebbe più imporre ad Ω_{2n-8} alcuna condizione affinchè venisse a comportarsi come biaggiunta ad F_n anche in A_4. Così si ha una nuova conferma di ciò che si è detto al n. 14.

zioni ivi usate. La trasformata di Ω_{2n-8} sarà

$$\Omega'_{4n-16} \equiv \theta_0 \sigma_2^{2n-8}(x'_1, x'_2, x'_3) + x'_4 \sigma_2^{2n-9}(x'_1, x'_2, x'_3)\theta'_1 +$$
$$+ x'^2_4 \sigma_2^{2n-10}(x'_1, x'_2, x'_3)\theta'_2 + x_4^3 \sigma_2^{2n-11}(x'_1, x'_2, x'_3)\theta'_3 + \cdots = 0,$$

ove si è posto θ'_i invece di $\theta_i(x'_1, x'_2, x'_3)$.

Perchè la Ω_{2n-8} sia biaggiunta ad F_n, deve la Ω'_{4n-16} avere la $x'_1 = x'_4 = 0$ per retta doppia, tacnodale, e in ciascun punto di essa, per piano tacnodale quello stesso che vi ha F_n; cioè deve essere 8 la moltiplicità d'intersezione di F'_{2n-2} e Ω'_{4n-16}, in ciascun punto di r'. Se poniamo $\theta_1 \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, dovrà essere anzitutto

$$\theta_0 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

affinchè r' sia doppia per Ω'_{4n-16}. Ma con ciò questa si spezza in $x'_4 = 0$ ed in una superficie residua di ordine $4n - 17$, avente r' per retta semplice; e questa nuova superficie si trova nelle condizioni della Ω'_{4n-16}, cioè imponendole di avere r' per retta doppia, anch'essa si spezza in $x'_4 = 0$ ed in un'altra superficie residua. Perchè dunque sia soddisfatta anche l'altra condizione relativa alla moltiplicità di intersezione di Ω'_{4n-16} e F'_{2n-2} in ogni punto generico di r', dovremo anzitutto supporre che quella retta sia tripla per Ω'_{4n-16}, cioè si abbia $\Omega'_{4n-16} \equiv x'^2_4 \Phi_{4n-18}$ (per cui sarà $\alpha_1 = 0$), essendo r' semplice per Φ_{4n-18}, ed imporre poi a quest'ultima superficie di avere in ogni punto di r' per piano tangente il piano tacnodale nello stesso punto ad F'_{2n-2}. In tal modo si ottiene appunto che sia 8 la moltiplicità di intersezione di F'_{2n-2} ed Ω'_{4n-16} in ogni punto di r' (*).

Dovendo Φ_{4n-18} contenere r' come retta semplice, sarà

$$\theta'_2 \equiv x'_1 (\beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \beta_3 x'_3).$$

(*) Infatti, siano f e g due curve aventi in comune un tacnodo O, colla stessa tangente in esso, e siano, in coordinate non omogenee

$$f \equiv a y^2 + y \mu_2 + \mu_4 + \ldots = 0$$
$$g \equiv b y^2 + y \nu_2 + \nu_4 + \ldots = 0$$

le loro equazioni (essendo μ_i e ν_i forme in x ed y, di ordine i, ed a, b costanti). La loro moltiplicità di intersezione in O è la stessa [Cfr. SEGRE «*Le moltiplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche...*», Giornale di Matem. di BATTAGLINI, t. 5, serie 2ª, (num. 3 e 13)] che quella di $f = 0$ colla curva $bf - ag = 0$, la quale ha in O un punto triplo, di cui una tangente coincide colla tangente tacnodale nello stesso punto ad $f = 0$.

Ed essendo

$$\theta_3 \equiv \gamma_1 x_1^3 + \cdots + \gamma_7 x_2^3 + \gamma_8 x_2^2 x_3 + \gamma_9 x_2 x_3^2 + \gamma_{10} x_3^3,$$

avremo che l'equazione del piano tangente, nel punto $x'_3 = \lambda x'_2$ della retta $x'_1 = x'_4 = 0$, alla Φ_{4n-18} è:

$$(a_4 + a_5 \lambda + a_6 \lambda^2)(\beta_2 + \beta_3 \lambda) x'_1 + (\gamma_7 + \gamma_8 \lambda + \gamma_9 \lambda^2 + \gamma_{10} \lambda^3) x'_4 = 0.$$

Perchè questo coincida col piano

$$(a_4 + a_5 \lambda + a_6 \lambda^2) x'_1 + (b_4 + b_5 \lambda + b_6 \lambda^2) x'_4 = 0,$$

che contato due volte costituisce il cono tangente nello stesso punto ad F'_{2n-2}, dovrà essere

$$\gamma_7 + \gamma_8 \lambda + \gamma_9 \lambda^2 + \gamma_{10} \lambda^3 = (\beta_2 + \beta_3 \lambda)(b_4 + b_5 \lambda + b_6 \lambda^2).$$

Si ha allora, indicando con χ_2 una forma quadratica in x_1, x_2, x_3, e ponendo χ'_2 invece di $\chi_2(x'_1, x'_2, x'_3)$:

$$\theta'_2 \equiv x'_1 (\beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \beta_2 x'_3),$$

$$\theta'_3 \equiv x'_1 \chi'_2 + (\beta_2 x'_2 + \beta_3 x'_3)(b_4 x'^2_2 + b_5 x'_2 x'_3 + b_6 x'^2_3),$$

e sostituendo in Ω'_{4n-16}, e poi ritornando nel 1.º spazio, sarà:

$$\Omega_{2n-8} \equiv x_4^{2n-10} x_1 (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) +$$
$$+ x_4^{2n-11} [x_1 \chi_2 + (\beta_2 x_2 + \beta_3 x_3)(b_4 x_2^2 + b_5 x_2 x_3 + b_6 x_3^2)] +$$
$$+ x_4^{2n-12} \theta_4 + \cdots = 0 \ (^{**}).$$

Per $n = 5$ la Ω_{2n-8} è una quadrica

$$\Omega_2 \equiv x_1 (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0,$$

cioè *se una superficie di 5.º ordine F_5 ha un oscnodo O, le sue quadriche biaggiunte sono costituite dal piano oscnodale di F_5 in O, e da un altro piano generico della stella di centro O.*

17. Sia F_n una superficie di ordine n, avente un punto triplo O, a cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima r' (nodale o cuspi-

---

(*) Possiamo dire che la Ω_{2n-8}, *biaggiunta ad F_n, ha in O un punto doppio biplanare di cui uno dei piani tangenti è il piano oscnodale $x_1 = 0$ in O ad F_n, e le tangenti principali di Ω_{2n-8} giacenti su $x_1 = 0$ sono, oltre l'asse del punto biplanare, le generatrici d'intersezione di questo piano col cono $\psi_2 = 0$* (avendo assunto per equazione di F_n quella stessa del n. 9).

dale) (*). Una superficie Ω_{2n-8}, di ordine $2n-8$, per essere biaggiunta ad F_n deve soddisfare dapprima alla condizione di avere O per punto doppio, cosicchè se

$$F_n \equiv x_4^{n-3} x_1^2 \psi_1 + x_4^{n-4} x_1 \psi_3 + x_4^{n-5} \psi_5 + \cdots = 0,$$

(avendo posto nel vertice A_4, ossia $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, del tetraedro di riferimento, il punto triplo O), dovrà anzitutto Ω_{2n-8} avere un'equazione del tipo:

$$\Omega_{2n-8} \equiv x_4^{2n-10} \theta_2 + x_4^{2n-11} \theta_3 + x_4^{2n-12} \theta_4 + \cdots = 0,$$

(ove ψ_i e θ_i sono al solito forme di ordine i in x_1, x_2, x_3). Applicando a queste due superficie la trasformazione del n. 9, avremo che, nel piano $x'_4 = 0$, la F'_{2n-3}, trasformata di F_n, ha una retta doppia r', (cioè $x'_1 = x'_4 = 0$). Perchè la Ω_{2n-8} sia biaggiunta ad F_n deve la superficie Ω'_{4n-18}, trasformata di Ω_{2n-8}, avere la retta r' per retta doppia. Imponendo ad Ω'_{4n-18} di soddisfare a questa condizione, e poi ritornando nel 1.° spazio, ne risulta che, indicando con α una costante, e con φ_2 una forma quadratica in x_1, x_2, x_3:

$$\theta_2 \equiv \alpha x_1^2, \quad \theta_3 \equiv x_1 \varphi_2 .$$

Si ha quindi che *se una superficie F_n ha un punto triplo O, a cui sia infinitamente vicina una retta doppia infinitesima r', nodale o cuspidale, le superficie biaggiunte di ordine* $2(n-4)$ *ad F_n hanno in O un punto doppio uniplanare (tacnodo), avente per retta doppia infinitesima, infinitamente vicina, la r'.*

Analogamente si dimostra che *se F_n ha in O un punto quadruplo a cui sia infinitamente vicina una retta doppia r', od una conica doppia γ', infinitesime (nodali o cuspidali), le superficie biaggiunte di ordine* $2(n-4)$ *ad F_n hanno in O un punto quadruplo, a cui è infinitamente vicina la retta doppia r', o rispettivamente, la conica doppia γ'.*

È facile ora vedere cosa si abbia nel caso in cui r' o γ' fossero per F_n linee tacnodali infinitesime.

18. Consideriamo, per ultimo, un punto triplo O di una superficie F_n, al quale sia infinitamente vicino un tacnodo O'.

Un tal punto, come è evidente per ciò che precede, *influisce su P per 7 unità* (considerato indipendentemente da ogni altra singolarità di F_n).

(*) Come al solito, per evitare complicazioni, supponiamo F_n, priva d'ogni altra singolarità.

Se riferiamo la F_n ad un sistema di coordinate cartesiane non omogenee aventi O per origine, e supponiamo che il tacnodo O' sia infinitamente vicino ad O nella direzione dell'asse delle z, avremo

$$F_n \equiv \varphi_3 + \varphi_4 + \cdots + \varphi_n = 0$$

ove le φ_i sono forme di ordine i nelle x, y, z, e di più φ_3 manca dei termini in z^3 e z^2, e φ_4 del termine in z^4 (*).

Se poniamo, in particolare,

$$\varphi_3 \equiv z\,(a_1\,x^2 + a_2\,y^2) + \cdots,$$

$$\varphi_5 \equiv c_1\,z^5 + \cdots,$$

e trasformiamo le F_n (del 1.º spazio Σ) colla trasformazione

$$x = x'\,z',\quad y = y'\,z',\quad z = z', \tag{10}$$

la trasformata F'_{2n-3} (del 2.º spazio Σ') avrà nell'origine $x' = y' = z' = 0$ un tacnodo, il cui piano tacnodale è

$$\sqrt{a_1}\,x' + \sqrt{a_2}\,y' + \sqrt{c_1}\,z' = 0. \tag{11}$$

Una superficie $\Omega_{2(n-4)}$, di ordine $2\,(n-4)$, per essere biaggiunta ad F_n dovrà avere dapprima un punto doppio in O, e poi, la sua trasformata Ω'_{4n-13}, ottenuta colle formole (10), dovrà ancora avere: a) il punto $x' = y' = z' = 0$ per punto semplice; b) in questo punto per piano tangente il piano (11).

Sia

$$\Omega_{2(n-4)} \equiv \chi_2 + \chi_3 + \cdots = 0,$$

e pongasi

$$\chi_2 \equiv \beta_1\,z^2 + z\,(\beta_2\,x + \beta_3\,y) + \cdots,$$

$$\chi_3 \equiv \gamma_1\,z^3 + \cdots;$$

la condizione a) si traduce, per la $\Omega_{2(n-4)}$, nella seguente

$$\beta_1 = 0, \tag{12}$$

cioè in questa, che il cono $\chi_2 = 0$ deve contenere l'asse delle z $(x = y = 0)$ nella cui direzione vi è su F_n il tacnodo O'.

(*) Oltre a certe relazioni che legano fra loro i coefficienti delle $\varphi_3, \ldots, \varphi_6$.

La b) si traduce nelle relazioni (*)

$$\beta_2 = \rho \sqrt{a_1}, \quad \beta_3 = \rho \sqrt{a_2}, \quad \gamma_1 = \rho \sqrt{c_1} \tag{13}$$

(ove ρ è un coefficiente di proporzionalità) che equivalgono a due condizioni da imporre alla $\Omega_{2(n-4)}$.

Nel caso in cui $n = 5$, la $\Omega_{2(n-4)}$ è una quadrica Ω_2. Siccome F_5 ha O per punto triplo, la Ω_2 sarà un cono quadrico di vertice O, il quale, per la (12) avrà un'equazione del tipo seguente:

$$\Omega_2 \equiv z(\beta_2 x + \beta_3 y) + (\beta_4 x^2 + \beta_5 x y + \beta_6 y^2) = 0. \tag{14}$$

Osserviamo che se fosse $c_1 = 0$, la F_5 da noi considerata avrebbe la $x = y = 0$ per retta doppia almeno (**); e siccome vogliamo escludere che ciò avvenga, così dovremo supporre

$$c_1 \neq 0.$$

Allora, poichè nella Ω_2 manca il coefficiente γ_1, così le (13) in questo caso diventano

$$\beta_2 = \rho \sqrt{a_1},$$

$$\beta_3 = \rho \sqrt{a_2},$$

$$0 = \rho \sqrt{c_1}.$$

Perchè sia soddisfatta l'ultima di queste, essendo $c_1 \neq 0$, sarà

$$\rho = 0$$

e quindi

$$\beta_2 = \beta_3 = 0.$$

Vale a dire Ω_2 si riduce a due piani del fascio ($x = 0$, $y = 0$).

Notiamo poi che anche le quadriche biaggiunte ad F_5, ottenute dall'insieme di due superficie aggiunte di 1.° ordine, sono costituite da coppie di piani del fascio ($x = 0$, $y = 0$); per cui *se una superficie di 5.° ordine* F_5

(*) Si può interpretare la relazione $\dfrac{\beta_2}{\sqrt{a_1}} = \dfrac{\beta_3}{\sqrt{a_2}}$, quando β_2 e β_3 sono diversi da zero, dicendo che il cono $\chi_2 = 0$ tangente in O ad $\Omega_{2(n-4)}$, deve avere lungo la retta $x = y = 0$ lo stesso piano tangente che vi ha il cono $\varphi_3 = 0$.

(**) Per le relazioni di cui si parla nella prima nota del presente numero.

ha un punto triplo O a cui sia infinitamente vicino un tacnodo O', secondo una certa direzione r, le quadriche biaggiunte ad F_5 sono costituite da coppie di piani del fascio di asse r.

Alcune considerazioni sui punti tripli di una superficie.

19. Sappiamo che un punto triplo *ordinario* (*) (n.º 3, n.º 4.) influisce sul genere numerico p_n, di una superficie per *un'unità.*

(*) Chiamerò, qui e nei n.[i] seg.[i], brevemente *ordinario* (isolato), sia un punto ordinario nel senso solito, che un punto del tipo di quello considerato al n.º 3, come anche un punto del tipo considerato al n.º 4, pel quale però tutti i caratteri $s^{(\nu)}$ siano ≤ 2; perchè questi punti influiscono su p_n come se fossero ordinari nel senso solito. Ciò per evitare inutili prolissità.

Si noti che un punto doppio singolare O il quale consti di un certo numero finito di punti doppi successivi, $O, O', O'', \ldots, O^{(i)}$ (in modo cioè che ad O segua O', ad O' segua O'', ecc., e siano del resto, ciascuno rispetto al precedente, in posizioni generiche) e tale che ad $O^{(i)}$ segua una retta doppia nodale o cuspidale $r^{(i+1)}$, influisce su p_n per un' unità, cioè si comporta per questo, come un tacnodo od un regresso di seconda specie. Se invece $r^{(i+1)}$ è retta tacnodale il punto O influisce su p_n per 3 unità, cioè come un oscnodo. Per cui, in questo numero e nel successivo, intenderemo per *tacnodo*, e per *regresso di 2.ª specie* (quando non sia un punto generico di una linea doppia), un punto doppio del tipo ora considerato, per il quale la $r^{(i+1)}$ sia rispettivamente doppia nodale, o cuspidale; e *oscnodo* invece, quando la $r^{(i+1)}$ sia luogo di tacnodi. Osserviamo ancora che se per un tal punto doppio O si immagina che venga a passare una linea doppia della superficie (in modo che la retta $O\,O'$ sia essenzialmente distinta dalla tangente in O alla linea), allora, tutti i punti $O', O'', \ldots, O^{(i-1)}, O^{(i)}$ verranno ad essere situati su rette doppie infinitesime, cioè ad O viene ad essere successiva una retta doppia infinitesima r', sulla quale sta O'; ad O' una retta doppia infinitesima r'', su cui sta $O'', \ldots$, ed infine $O^{(i)}$ starà esso pure su una retta doppia infinitesima successiva ad $O^{(i-1)}$, e ad esso succederà la $r^{(i+1)}$. Basterà, per ciò, provare che, perchè è O'' successivo ad O', e questo ad O, il quale sta su una linea doppia, il punto O' è un punto di una retta doppia infinitesima, successiva ad O. È noto (Segre, *Sulla scomposizione...*, n.º 12) che, se A è un punto uniplanare per una superficie F, ed A' è uno dei punti doppi infinitamente vicino ad esso sulla superficie, ed r è la tangente singolare (di F in A) su cui sta A', affinchè infinitamente vicino (successivo) ed A' vi sia un ulteriore punto doppio di F, è necessario e sufficiente che due tangenti singolari in A coincidano con r. Siccome, nel nostro caso, il punto uniplanare O sta su una linea doppia, due delle tangenti singolari in O coincidono già nella tangente a questa in O; se due altre hanno da coin-

Consideriamo dei tipi di punti tripli, prodotti da condensazioni di singolarità abbassanti p_n, i quali abbiano su questo genere un'influenza minore od uguale a quattro unità.

Distingueremo i vari tipi di punti tripli singolari che considereremo, secondo la loro influenza Δ su p_n.

a) Hanno $\Delta = 1$ i soli punti tripli isolati *ordinari* (*).

b) Hanno $\Delta = 2$ quelli costituiti da un punto triplo O a cui è successivo un tacnodo, od un regresso di seconda specie, od un punto triplo O'.

Hanno $\Delta = 3$ i seguenti:

c) un punto triplo a cui è successiva una retta doppia nodale o cuspidale r';

d) un punto triplo O a cui è successivo un punto triplo O', ed a questo è successivo un tacnodo, od un regresso di 2.ª specie, od un punto triplo O''.

e) un punto triplo a cui è successivo un tacnodo od un regresso di 2.ª specie, sulla retta doppia infinitesima del quale vi sia un oscnodo.

Hanno $\Delta = 4$ i seguenti:

f) un punto triplo a cui segua uno dei punti *c*), *d*), *e*);

g) un punto triplo a cui sia infinitamente vicino un oscnodo;

h) un punto triplo a cui sia successiva una retta doppia infinitesima, nodale o cuspidale, su cui stia un oscnodo; o sulla quale stia un tacnodo (o regresso di 2.ª specie) sulla cui retta doppia infinitesima vi sia un oscnodo;

k) un punto triplo al quale segua una retta doppia, nodale o cuspidale, su cui stia un punto triplo, al quale segua un tacnodo, od un regresso di 2.ª specie, od un punto triplo, od ancora una retta doppia nodale o cuspidale.

Vediamo ora quali fra questi punti, quando si suppongano situati su una linea doppia λ (nodale o cuspidale) producono nell'influenza di essa su p_n un'incremento Δ' non superiore a due unità.

Avremo, per l'ultima osservazione del n.° 11 (in nota) quanto segue:

Hanno $\Delta' = 1$:

a') tutti quei punti tripli aventi $\Delta = 2$;

---

cidere con quella che dà la direzione di O', nel punto O vengono ad esservi quattro, epperò infinite tangenti singolari (cioè queste risultano indeterminate), ed il punto O' viene ad essere un punto di una retta doppia infinitesima successiva ad O.

(*) Nel senso che diamo qui alla parola *ordinario*. Dicendo, nel seguito, *punti tripli*, senz'altro, intenderemo *tripli ordinari*, nel senso ora detto, ed isolati.

b') un punto triplo a cui è successiva una retta doppia nodale o cuspidale (*).

Hanno $\Delta' = 2$:

c') tutti i punti tripli aventi $\Delta = 3$, tranne quello ora considerato in b');

d') tutti i punti (aventi $\Delta = 4$), che sono considerati in h) e k) (**).

Applicazioni dei risultati precedenti alla determinazione di F_5 razionali.

20. Prendiamo ora a considerare le superficie di 5.° ordine, e raggruppiamo punti multipli e linee multiple di cui possono essere dotate (***), e le cui influenze su p_n sono minori od uguali, per esse, a quattro unità,

---

(*) Hanno $\Delta' = 1$ un oscnodo, ed anche un tacnodo (o regresso di 2.ª specie) sulla cui retta doppia infinitesima (nodale o, rispettivamente, cuspidale) vi sia un oscnodo. Cfr. a questo proposito la nota 4ª del n. 21.

(**) Osserviamo poi che, per particolari posizioni relative delle singolarità costituenti i punti tripli che abbiamo considerato, può darsi che se ne vengano ad introdurre altre; se queste non sono semplici punti doppi staccati — oppure punti tripli ordinarii o tacnodi o regressi di seconda specie, che vengano ad essere posti su rette doppie nodali o cuspidali preesistenti —, cambierà in generale la natura della singolarità, e per la determinazione della sua influenza su p_n si dovrà vedere a quale tipo essa effettivamente appartenga. Lo stesso si dica per i gruppi di singolarità che attribuiremo alle superficie di 5.° ordine nel numero seguente. Così per es., se ad un punto triplo O seguono in due direzioni diverse due tacnodi, essi vengono necessariamente a stare su una retta doppia infinitesima, infinitamente vicina ad O, e siccome un tacnodo su una retta doppia (nodale o cuspidale) non ne altera l'influenza su p_n, così il punto O devesi considerare come un caso particolare di un punto triplo del tipo c). Analogamente se su una superficie di 5.° ordine vi sono due punti tripli O_1 ed O_2, a ciascuno dei quali segua, in una certa direzione, un punto triplo, la superficie (essendo quelle direzioni sghembe fra loro) ha la retta $O_1 O_2$ per retta doppia; così pure se una superficie di 5.° ordine ha due tacnodi O_1, O_2 tali che i piani tacnodali ad essi relativi passino per la retta $O_1 O_2$, questa risulterà doppia per la superficie; se invece per la $O_1 O_2$ passa solo il piano tacnodale di O_2, il punto O_1 risulta triplo e quella retta semplice per la superficie stessa.

E così pure si vede che, mentre una F_5 dotata di un oscnodo O_1 e di un tacnodo O_2 in posizioni generiche è razionale, non è più tale quando il piano oscnodale in O_1 e quello tacnodale in O_2 appartengano al fascio di asse $O_1 O_2$.

(***) Ci limiteremo, per le linee multiple, a considerare rette e coniche. Per superficie razionali di 5.° ordine dotate di sole linee multiple, si vedano i lavori citati di Ca-

a seconda della loro influenza su p_n. Secondo che questa influenza è 1, 2, 3, 4 unità distribuiremo le singolarità rispettivamente nei gruppi I, II, III, IV seguenti.

I.

I_1. Un tacnodo, o regresso di 2.ª specie.

I_2. Un punto triplo ordinario.

II.

II_1. Un tacnodo od un regresso di 2.ª specie, sulla cui retta doppia infinitesima vi sia un oscnodo.

II_2. Un punto triplo a cui è successivo un tacnodo od un regresso di seconda specie.

II_3. Un punto triplo a cui è successivo un punto triplo.

II_4. Una retta doppia nodale o cuspidale.

III.

III_1. Un oscnodo.

III_2. Un punto triplo a cui è infinitamente vicino un punto doppio del tipo II_1.

III_3. Un punto triplo a cui è successiva una retta doppia infinitesima, nodale o cuspidale.

III_4. Un punto triplo, a cui è successivo un punto triplo, ed a questo è successivo un tacnodo, od un regresso di seconda specie.

III_5. Un punto triplo O, a cui è successivo un punto triplo O', al quale è successivo un punto triplo O''.

PORALI, e specialmente la Memoria di HILL: *On quintic surfaces*. Mathematical Review. Vol. 1.°, 1896. Si osservi che se le linee doppie di queste superficie fossero in tutto od in parte cuspidali per esse, queste, quando non sono spezzate, nè rigate, sono pure razionali. — Escluderémo poi dal presente lavoro la considerazione delle F_5 razionali, monoidali.

III_6. Una retta doppia (nodale o cuspidale) r su cui stia un oscnodo, oppure un punto O di uno dei tipi II_1, II_2, II_3, in modo che, in questi ultimi tre casi, il tacnodo (o regresso di 2.ª specie), o rispettivamente, il punto triplo infinitamente vicino ad O non stia su r.

III_7. Una retta doppia r (nodale o cuspidale) su cui stia un punto triplo O avente, infinitamente vicina, una retta doppia infinitesima, nodale o cuspidale.

III_8. Una retta doppia luogo di tacnodi, essendo il piano tacnodale uno stesso per tutti i punti della retta (*).

III_9. Una conica doppia, nodale o cuspidale.

IV.

IV_1. Un punto triplo a cui sia infinitamente vicino uno dei punti $III_1, \ldots, III_5$.

IV_2. Un punto triplo a cui sia infinitamente vicina una retta doppia del tipo della III_6, o III_7.

(*) Che sia per una F_5, di 3 unità l'influenza di questa singolarità su p_n, si può vedere come segue. Una superficie F_n, di ordine n, abbia una retta doppia r, di equazioni $x_1 = x_2 = 0$, luogo di tacnodi, in modo che il piano tacnodale lungo r sia (indicando con a e b delle costanti)

$$a\,x_1 + b\,x_2 = 0,$$

per tutti i punti della retta. Una superficie Φ_{n-4}, di ordine $n-4$, per cui la r sia semplice, ha nel punto $x_4 = \lambda\, x_3$ di essa un piano tangente la cui equazione è del tipo seguente (le α_{ij} essendo costanti):

$$(\alpha_{11} + \alpha_{21}\lambda + \ldots + \alpha_{n-4,1}\lambda^{n-5})\,x_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{22}\lambda + \ldots + \alpha_{n-4,2}\lambda^{n-5})\,x_2 = 0$$

Perchè questo coincida, per ogni valore di λ, col piano $a\,x_1 + b\,x_2 = 0$, dovremo avere

$$\alpha_{21} = \ldots = \alpha_{n-4,1} = 0, \qquad \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{n-4,2} = 0,$$

$$\frac{\alpha_{11}}{a} = \frac{\alpha_{12}}{b}.$$

Queste condizioni, aggiunte alle $n-3$ che occorrono perchè la r sia semplice per Φ_{n-4}, danno $n - 3 + 2(n-5) + 1 = 3n - 12$ condizioni. Di $3n - 12$ unità è quindi l'influenza su p_n per F_n, della speciale retta tacnodale considerata. Per $n = 5$ quest'influenza è di 3 unità, come si è detto.

IV$_3$. Una retta doppia, nodale o cuspidale, su cui stiano due punti, ciascuno dei quali sia di uno qualunque dei tipi II$_1$, II$_2$, II$_3$, III$_1$, III$_3$, in modo che, chiamandoli O_1, O_2, ed r_1, r_2 essendo le direzioni secondo cui sono loro infinitamente vicine le singolarità di cui sono costituiti, siano le r_1, r_2 sghembe fra loro.

IV$_4$. Una conica doppia, nodale o cuspidale, su cui stia uno dei punti II$_1$, II$_2$, II$_3$, III$_1$, III$_3$.

IV$_5$. Una retta doppia, nodale o cuspidale, su cui vi sia un punto di uno dei tipi III$_2$, III$_4$, III$_5$, IV$_2$.

IV$_6$. Una retta doppia luogo di tacnodi o di regressi di seconda specie, tale che il piano, che contato due volte dà il cono tangente in ciascun punto di essa, varii al variare del punto sulla retta (*).

E ciò sarà provato se p. es. dimostreremo che una F_5 dotata di tale singolarità (IV$_6$) è razionale. Sia r una tal retta, che per ora supponiamo luogo di tacnodi. Consideriamo il piano π tangente in un punto O di r, alla superficie. La sua sezione con F_5 ha in O un punto quadruplo; d'altronde la r è doppia per questa sezione, quindi la cubica residua ha un punto doppio in O, cioè è razionale. Dunque, se il piano π varia al variare di O su r, la F_5 sarà dotata di un fascio di curve razionali, cioè, per un noto teorema di Nöther (**), essa è razionale. Avrà quindi $p_n = p_g = P = 0$.

Se r è luogo di regressi di seconda specie, basta osservare che, tanto l'influenza su p_n di una tale retta, quanto il comportamento in essa delle quadriche biaggiunte ad F_5 sono gli stessi che se r fosse tacnodale (n.^{i} 8, 14). Se ne deduce quindi che anche in tal caso la F_5 è razionale (quando non è spezzata).

21. Ritornando al teorema del signor Castelnuovo, enunciato al n.° 1, e tenendo presente quanto è stato osservato ai numeri 12,..., 19, combiniamo le singolarità dell'elenco precedente in modo che gli indici romani diano per somma 4, cioè che i vari aggruppamenti riducano p_n (che è uguale a 4 per la F_5 generale) a zero; ed in modo che soddisfino anche all'altra condizione di ridurre P a zero, cioè in modo che manchino le quadriche biaggiunte ad ogni F_5 dotata di uno qualunque di tali gruppi di singolarità.

(*) Non è difficile scrivere le equazioni delle F_5 dotate delle varie singolarità considerate in questo numero.

(**) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Annalen, tom. 3 (1870).

Avremo così che *sono razionali (quando non sono spezzate) le superficie di 5.° ordine dei seguenti tipi*:

α) $F_5(I_i, I_j, I_h, I_k)$, ove *(i, j, h, k) è una combinazione qualunque, con ripetizione dei numeri* 1, 2 (*);

β) $F_5(II_r, II_s)$, *ove (r, s) è una combinazione qualunque, con ripetizione dei numeri* 1, 2, 3, 4 (**);

γ) $F_5(I_i, I_j, II_r)$, *ove* $i, j = 1, 2$, ed $r = 1, 2, 3, 4$ (***);

δ) $F_5(I_i, III_l)$, *ove* $i = 1, 2$, ed $l = 1, 2, \ldots, 9$;

ε) $F_5(IV_p)$, *ove* $p = 1, 2, \ldots, 6$ (****).

Da queste dobbiamo però escluderne alcune, le quali, per le posizioni particolari delle singolarità di cui sono dotate, pur avendo $p_n = p_g = 0$, non mancano di quadriche biaggiunte. Saranno quindi da escludere:

λ) *Ogni* $F_5(I_1, I_1, I_1, I_1)$, *quando i quattro piani tangenti ad essa nei quattro punti* I_1 *siano pure tangenti in questi punti ad una quadrica;*

(*) Indico con $F_5(I_i, I_j, I_h, I_k)$ una F_5 dotata dalle singolarità I_i, I_j, I_h, I_k (dell'elenco del n.° precedente). Così per gli altri casi.

(**) Notando che se $r = s = 4$, cioè se la F_5 è dotata di due rette doppie, queste debbono essere sghembe.

(***) Riguardo alla $F_5(I_2, I_2, II_4)$ riporterò qui un'osservazione del prof. Segre: « Si trasformi una F_5 dotata di una retta doppia nodale, e di due punti tripli ordinari, mediante le quadriche (∞^4) per la retta doppia ed i punti tripli; si ottiene una F_5 di S_4 a sezioni iperpiane di genere 2, giacente su un cono M_3^2, sì che i piani delle due schiere segano la F_5 rispettivamente in coniche ed in cubiche pel vertice della M_3^2. Proiettando in S_3 si ha la superficie razionale di 5.° ordine (di Clebsch) dotata di una quartica di 1.ª specie per linea doppia. »

(****) Si noti che non si afferma però che siano queste superficie *tutte* distinte fra loro; abbiamo anzi già visto (nota ultima del n. 19) che una $F_5(II_3, II_3)$ non è altro che una delle $F_5(IV_3)$. Così, per la nota 1.ª al n. 19, si ha che la singolarità che viene ad ottenersi supponendo che su una linea doppia vi sia un tacnodo sulla cui retta doppia infinitesima vi sia un oscnodo, è fra quelle che si ottengono supponendo che sulla linea doppia vi sia un oscnodo.

μ) *Ogni* $F_5(I_1, I_1, I_1, I_2)$, *quando i tre piani tangenti ad essa nei punti* I_1 *sono pure tangenti in questi punti ad un cono quadrico avente il vertice nel punto triplo di* F_5;

ν) *Ogni* $F_5(I_1, I_1, I_2, I_2)$, *quando i due piani tangenti ad essa nei punti* I_1 *passino contemporaneamente per entrambi i punti* I_2 (*);

ρ) *Ogni* F_5 *avente un punto triplo a cui sia infinitamente vicino in una certa direzione* r *un tacnodo o regresso di 2.ª specie, od un punto triplo, ed abbia altri due punti* O_1 *ed* O_2 *del tipo* I_1 *in modo che i piani i quali, contati due volte, danno i coni tangenti in* O_1 *ed* O_2, *passino entrambi per* r;

le quali tutte, quando non sono spezzate, hanno $p_g = p_n = 0$, *e* $P = 1$.

Savigliano, 12 Gennaio 1901.

NOTA ADDIZIONALE.

Dopo che il manoscritto della presente Memoria era già stato depositato nella Direzione degli *Annali*, il prof. MONTESANO pubblicò un secondo lavoro (oltre quello citato in principio) su questo argomento (**). Sono ivi determinate e studiate 24 superficie di 5.° ordine razionali, parecchie delle quali erano pure già state da me determinate nel mio opuscolo citato in principio. Il prof. MONTESANO introduce in questa sua Nota le locuzioni « *punti doppi singolari di 1.° e di 2.° ordine* », con cui intende di indicare singolarità analoghe a quelle di cui sono dotate le superficie omaloidiche di 4.° ordine

(*) Cfr. CASTELNUOVO: *Sulle superficie di genere zero*, n. 15, pel caso in cui i punti I_1 siano tacnodi.

(**) *Le superficie omaloidiche di 5.° ordine.* Rendiconti della R. Accademia di Napoli, fasc. 2.°, febbraio 1901. — Una superficie di 5.° ordine razionale è pure stata determinata dal sig. BOTTARI nella Memoria: *Sulla razionalità dei piani multipli* $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$, Annali di Matem., serie III, vol. 2.°, pag. 295.

$F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$ di Nöther (*). A proposito di questi punti Nöther osserva (**) che *die Singularität der Flächen* $F_4^{(2)}$ *und* $F_4^{(3)}$ *als aus zwei benachbarten einfacheren Singularitäten — einem gewöhnlichen Doppelpunkt, und einem Selbstberührungspunkt — zusammengesetzt aufgefasst werden kann.* Tali singolarità dunque, come anche direttamente si scorge dall'esame delle equazioni delle $F_4^{(2)}$, $F_4^{(3)}$, sono comprese fra quelle che abbiamo indicato con I_1 (a questo scopo occorrerà tener presente la prima Nota del n. 19). È facile quindi trovare, fra quelle ora determinate al n. 20, le superficie del professore Montesano (***), il quale le ottiene come trasformate di altre (di 3.°, 4.° e 5.° ordine) di cui è nota la razionalità.

I due metodi sono quindi essenzialmente distinti; ed i vantaggi dei due procedimenti sono chiaramente espressi nelle parole seguenti del prof. Montesano (****): « Questo metodo (*****), mentre sembra il più addatto alla determinazione completa dei vari tipi di superficie omaloidiche di 5.° ordine, limitando il campo delle ricerche occorrenti, non fornisce immediatamente la dimostrazione dell'effettiva esistenza dei tipi riconosciuti possibili, nè dà facilmente la loro rappresentazione sul piano, la quale invece discende con la maggior semplicità dal procedimento da me tenuto. »

(*) Nöther, *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung.* Math. Ann., 33.

(**) In nota al § 2 della sua Memoria ora citata.

(***) Per la superficie di 5.° ordine « dotata di un punto triplo O, a cui è infinitamente vicino un punto triplo O', al quale segue una retta *tripla* r'' », che il prof. Montesano ritiene razionale (cfr. la chiusa della sua seconda Memoria citata) osservo che trasformandola colla trasformazione del n. 2, ponendo il punto base isolato di questa nel punto triplo di F_5, si ha una superficie di 7.° ordine, avente un punto quintuplo ordinario, isolato, una conica doppia ordinaria, ed un punto triplo a cui segue una retta tripla infinitesima. Questa superficie ha $p_n = 20 - 10 - 7 - 7 = -4$, per cui non è razionale, e quindi neanche la F_5. Questa sarebbe invece razionale se la r'' fosse doppia soltanto per essa, perchè conterrebbe un fascio di quartiche razionali, giacenti nei piani per la retta OO'; e sarebbe una $F_5\,(IV_1)$. (Cfr. anche il n. 10 della Nota citata del prof. Montesano, *Su alcune superficie omaloidiche...*)

(****) *Le superficie omaloidiche di 5.° ordine*, pag. 2.

(*****) Cioè quello seguito nel presente lavoro.

Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per dati spostamenti in superficie.

(Del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA, *a Catania.)*

Nella mia Memoria: *Equilibrio dei corpi elastici isotropi* (*) nel risolvere il problema della deformazione di una sfera elastica isotropa per dati spostamenti in superficie, avevo dovuto risolvere lo stesso problema nell'ipotesi che una delle componenti gli spostamenti in superficie fosse eguale all'inversa del segmento variabile che congiunge un punto interno alla sfera con i punti della sua superficie e che le altre due componenti fossero nulle. Ora ho potuto osservare che, il metodo ivi adoperato per risolvere questo problema ausiliario, vale senz'altro anche per il problema generale. In questa Nota appunto, occupandomi del problema generale (**), ripeto quel metodo quasi alla lettera, ottenendo in tal modo, con calcoli notevolmente semplici, le formole di risoluzione [form. (2)'], le quali, nel mentre non differiscono essenzialmente da quelle dal prof. ALMANSI (***) (credo, le più comprensive che siano state date sin ora), si presentano sotto una forma che può interessare. È notevole il fatto che le medesime formole [form. (2)''] valgono per il problema relativo allo spazio indefinito limitato da una superficie sferica, quando in esse si muti lo o in ∞.

Come applicazione delle formole trovate, dò gli sviluppi in serie di funzioni razionali, intere, omogenee delle componenti la deformazione di una

(*) *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa;* vol. VII.

(**) Effettivamente io qui mi limito, come per amore di brevità può sempre farsi, al caso in cui due delle componenti gli spostamenti in superficie sono nulle.

(***) *Sulla deformazione della sfera elastica.* Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino; Serie II, tomo XLVII.

sfera elastica per dati spostamenti in superficie, e gli sviluppi in serie di funzioni razionali, fratte, omogenee delle componenti la deformazione di un corpo elastico indefinito limitato da una superficie sferica pure per dati spostamenti in superficie. La possibilità di questi sviluppi è stata dimostrata di già dal prof. Somigliana nella sua Memoria: *Sulle equazioni dell'elasticità* (*); ma la deduzione degli sviluppi stessi proseguendo nella via ivi iniziata offre, a parer mio, molte difficoltà; mentre che ho potuto qui ottenerli con molta rapidità dalle formole di risoluzione sopra notate. I detti sviluppi potrebbero ottenersi ancora servendosi degli sviluppi delle componenti normale e tangenziali della deformazione dati dal prof. Marcolongo (**); ma i risultati verrebbero troppo complicati.

1. Sia σ una superficie sferica di raggio R e sia f_1 una funzione arbitrariamente data dei punti di σ, la quale per altro soddisfi alle condizioni richieste per l'esistenza di una funzione φ_1, che risolva il *problema di* Dirichlet relativamente alla sfera di raggio R e che nei punti di σ coincida con f_1. Scritte le equazioni indefinite dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi sotto la forma (***).

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2 \xi + k\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ &\Delta^2 \eta + k\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \left(\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \\ &\Delta^2 \zeta + k\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(k dipende dalle costanti di isotropia, x, y, z sono le coordinate dei punti dello spazio riferito a tre assi cartesiani ortogonali con l'origine nel centro della sfera), volendo determinare le funzioni ξ, η, ζ in modo che nei punti dell'interno della sfera soddisfino alle precedenti equazioni e che nei punti di σ si abbia.

$$\xi = f_1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \tag{1'}$$

si ponga:

$$\xi = \varphi_1 + \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta'. \tag{2}$$

(*) *Annali di Matematica*; Serie 2.ª, tomo XVII.

(**) *Deformazione di una sfera isotropa.* Annali di Matematica; Serie 2.ª, tomo XXIII.

(***) Come può sempre farsi, si suppongono nulle le forze esterne.

Allora si dovrà avere nei punti dell'interno della sfera:

$$\Delta^2 \xi' + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$\Delta^2 \eta' + k \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \left(\theta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z}\right)$$

$$\Delta^2 \zeta' + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

e nei punti di σ:

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0.$$

Indichiamo con θ' i valori che la funzione θ prende nei punti di σ, con x', y', z' le coordinate dei punti di σ; e poniamo ancora:

$$\xi' = \xi'' - \frac{k}{2} x \theta, \quad \eta' = \eta'' - \frac{k}{2} y \theta, \quad \zeta' = \zeta'' - \frac{k}{2} z \theta. \tag{3}$$

Si verifica immediatamente che basterà determinare le funzioni ξ'', η'', ζ'' in modo che nei punti dell'interno della sfera si abbia:

$$\Delta^2 \xi'' = \Delta^2 \eta'' = \Delta^2 \zeta'' = 0,$$

nei punti della superficie σ:

$$\xi'' = \frac{k}{2} x' \theta', \quad \eta'' = \frac{k}{2} y' \theta', \quad \zeta'' = \frac{k}{2} z' \theta'.$$

Si avrà allora, indicando con ρ il raggio vettore che dal centro della sfera va ad un punto qualsiasi di essa, e con r il segmento variabile che da questo punto va ai punti di σ,

$$\xi'' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4 \pi R} \int_\sigma \frac{x' \theta'}{r^3} d\sigma, \quad \eta'' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4 \pi R} \int_\sigma \frac{y' \theta'}{r^3} d\sigma,$$

$$\zeta'' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4 \pi R} \int_\sigma \frac{z' \theta'}{r^3} d\sigma;$$

e poichè la funzione θ è armonica, si avrà ancora:

$$\theta = \frac{R^2 - \rho^2}{4 \pi R} \int_\sigma \frac{\theta'}{r^3} d\sigma. \tag{4}$$

Sostituendo nelle (3), otteniamo:

$$\xi' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(x' - x)\,\theta'}{r^3}\, d\sigma, \quad \eta' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(y' - y)\,\theta'}{r^3}\, d\sigma,$$

$$\zeta' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(z' - z)\,\theta'}{r^3}\, d\sigma;$$

e posto:

$$H = \int_\sigma \frac{\theta'}{r}\, d\sigma, \tag{5}$$

si avrà ancora:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \eta' = \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \zeta' &= \frac{k}{2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3)'$$

2. Dalle precedenti formole risulta, osservando che la funzione H è armonica,

$$4\pi R\,\theta = 4\pi R \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - k\rho \frac{dH}{d\rho};$$

e dalle (4), facendo uso della (5),

$$4\pi R\,\theta = H + 2\rho \frac{dH}{d\rho};$$

quindi, posto $t = \dfrac{1}{2+k}$, avremo per la funzione H l'equazione:

$$\rho \frac{dH}{d\rho} + tH = 4\pi R t \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \tag{6}$$

e per conseguenza:

$$H = 4\pi R t \rho^{-t} \left\{ \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \rho^{t-1}\, d\rho + C \right\} \tag{7}$$

con C costante da determinarsi convenientemente.

Avendo riguardo ai limiti entro cui variano i valori che possono assumere le costanti di isotropia, risulta:

$$0 < t < 1;$$

allora, osservando che nei punti dell'interno della sfera la funzione φ_1 è finita insieme alle sue derivate dei vari ordini, dovendo la funzione H essere finita

anche per $\rho = 0$, dovremmo fare nella (7) $C = 0$. In questo modo si avrà:

$$H = 4\pi R t \rho^{-t} \int_0^{\rho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \rho^{t-1} d\rho;$$

e, integrando per parti,

$$H = 4\pi R \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - 4\pi R \rho^{-t} \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial \rho} \rho^t d\rho.$$

Derivando ambo i membri di questa formola rispetto ad x, otteniamo un'espressione di $\frac{\partial H}{\partial x}$, dalla quale risulta ovviamente:

$$\left(\rho^{t+1} \frac{\partial H}{\partial x}\right)_{\rho=0} = 0. \tag{8}$$

Noi non ci serviremo di tale espressione di $\frac{\partial H}{\partial x}$ per sostituirla nella prima delle (3)', troveremo invece un'espressione più semplice, procedendo nel seguente modo.

Deriviamo ambo i membri della equazione (6) rispetto ad x. Si ottiene:

$$t \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{x}{\rho} \frac{dH}{d\rho} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{dH}{d\rho} = 4\pi R t \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2};$$

e poichè:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{dH}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{x}{\rho^2} \frac{dH}{d\rho},$$

risulterà:

$$(t+1) \frac{\partial H}{\partial x} + \rho \frac{d}{d\rho} \frac{\partial H}{\partial x} = 4\pi R t \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2};$$

e quindi:

$$(t+1) \rho^t \frac{\partial H}{\partial x} + \rho^{t+1} \frac{d}{d\rho} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 4\pi R t \rho^t \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2},$$

ossia:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{t+1} \frac{\partial H}{\partial x}\right) = 4\pi R t \rho^t \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}.$$

Di qui, integrando e tenendo conto della (8), risulta:

$$\rho^{t+1} \frac{\partial H}{\partial x} = 4\pi R t \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \rho^t d\rho.$$

Similmente si può scrivere:

$$\rho^{t+1}\frac{\partial H}{\partial y} = 4\pi R\, t \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \rho^t \, d\rho,$$

$$\rho^{t+1}\frac{\partial H}{\partial z} = 4\pi R\, t \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \rho^t \, d\rho.$$

Sostituendo le espressioni trovate di $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial H}{\partial z}$ nelle (3)', le (2) divengono:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \varphi_1 + \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}} \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \rho^t \, d\rho = \\
&= \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} f_1 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\rho^{t+1}} \int_0^{\rho} \rho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3} \right) d\rho \right\} d\sigma, \\
\eta &= \qquad \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}} \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \rho^t \, d\rho = \\
&= \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} f_1 \left\{ \frac{k}{2(2+k)\rho^{t+1}} \int_0^{\rho} \rho^t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3} \right) d\rho \right\} d\sigma, \\
\zeta &= \qquad \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}} \int_0^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \rho^t \, d\rho = \\
&= \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} f_1 \left\{ \frac{k}{2(2+k)\rho^{t+1}} \int_0^{\rho} \rho^t \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3} \right) d\rho \right\} d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Se invece del campo finito racchiuso dalla superficie sferica σ, si trattasse del campo indefinito limitato dalla medesima superficie sferica, indicando ancora qui con φ_1 la funzione armonica in questo campo che nei punti di σ

coincide con la funzione f_1, calcoli perfettamente analoghi ci darebbero:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \varphi_1 + \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\rho \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\rho^t d\rho = \\
&= \frac{\rho^2-R^2}{4\pi R}\int_\sigma f_1\left\{\frac{1}{r^3}+\frac{k}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\rho \rho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)d\rho\right\}d\sigma, \\
\eta &= \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\rho \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}\rho^t d\rho = \\
&= \frac{\rho^2-R^2}{4\pi R}\int_\sigma f_1\left\{\frac{k}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\rho \rho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)d\rho\right\}d\sigma, \\
\zeta &= \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\rho \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial z}\rho^t d\rho = \\
&= \frac{\rho^2-R^2}{4\pi R}\int_\sigma f_1\left\{\frac{k}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\rho \rho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)d\rho\right\}d\sigma,
\end{aligned}\right\} \quad (2)''$$

nelle quali ρ è il raggio vettore che parte dal centro della sfera e va ad un punto qualsiasi dello spazio indefinito limitato da σ, r il segmento variabile che parte da questo punto e va ai punti di σ.

3. Si ha, come è noto, per i punti dell'interno della sfera di raggio R:

$$\varphi_1 = \sum_0^\infty{}_n\, \rho^n\, Y'_n = \sum_0^\infty{}_n\, V_n,$$

per i punti dello spazio esterno alla sfera di raggio R:

$$\varphi_1 = \sum_0^\infty{}_n\, \frac{Y''_n}{\rho^{n+1}} = \sum_1^\infty{}_n\, V_{-n},$$

dove: $$Y'_n = \frac{2n+1}{4\pi R^{n+2}}\int_\sigma P_n f_1\, d\sigma, \quad Y''_n = \frac{2n+1}{4\pi} R^{n-1}\int_\sigma P_n f_1\, d\sigma \qquad (9)$$

e dove P_n è la nota *funzione di* Legendre; e poichè è applicabile la derivazione per serie fino ad un ordine qualsiasi alla serie $\sum_0^\infty{}_n V_n$ nei punti dell'interno della sfera di raggio R, alla serie $\sum_0^\infty{}_n V_{-n}$ nei punti esterni alla sfera

di raggio R, così le (2)', (2)'' si potranno rispettivamente scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sum_0^\infty{}_n V_n + \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_0^\varrho \sum_0^\infty{}_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}\rho^t d\rho = \\
&= \sum_0^\infty{}_n \left\{ V_n + \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_0^\varrho \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}\rho^t d\rho \right\}, \\
\eta &= \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_0^\varrho \sum_0^\infty{}_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial y}\rho^t d\rho = \\
&= \sum_0^\infty{}_n \left\{ \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_0^\varrho \frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial y}\rho^t d\rho \right\}, \\
\zeta &= \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_0^\varrho \sum_0^\infty{}_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial z}\rho^t d\rho = \\
&= \sum_0^\infty{}_n \left\{ \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_0^\varrho \frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial z}\rho^t d\rho \right\};
\end{aligned}\right\} \quad (2)',$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sum_1^\infty{}_n V_{-n} + \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\varrho \sum_1^\infty{}_n \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x^2}\rho^t d\rho = \\
&= \sum_1^\infty{}_n \left\{ V_{-n} + \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\varrho \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x^2}\rho^t d\rho \right\}, \\
\eta &= \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\varrho \sum_1^\infty{}_n \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x\,\partial y}\rho^t d\rho = \\
&= \sum_1^\infty{}_n \left\{ \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\varrho \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x\,\partial y}\rho^t d\rho \right\}, \\
\zeta &= \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\varrho \sum_1^\infty{}_n \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x\,\partial z}\rho^t d\rho = \\
&= \sum_1^\infty{}_n \left\{ \frac{k(R^2-\rho^2)}{2(2+k)\rho^{t+1}}\int_\infty^\varrho \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x\,\partial z}\rho^t d\rho \right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)'',$$

Ora si ha:

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} = \rho^{n-2} D'_{xx} Y'_n, \quad \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho^{n+2}} D''_{xx} Y''_{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x \partial y} = \rho^{n-2} D'_{xy} Y'_n, \quad \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\rho^{n+2}} D''_{xy} Y''_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots,$$

dove i simboli $D'_{xx} Y'_n$, $D'_{xy} Y'_n, \ldots$; $D''_{xx} Y''_{n-1}$, $D''_{xy} Y''_{n-1}, \ldots$ servono ad esprimere le operazioni che vanno fatte rispettivamente sulle funzioni sferiche Y'_n, Y'_{n-1} in conseguenza delle derivazioni indicate ai primi membri delle formole stesse; e si ha ancora:

$$\int_0^\rho \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} \rho^t \, d\rho = D'_{xx} Y'_n \int_0^\rho \rho^{n+t-2} \, d\rho = \rho^{n+t-1} \frac{D'_{xx} Y'_n}{n+t-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\int_\infty^\rho \frac{\partial^2 V_{-n}}{\partial x^2} \rho^t \, d\rho = D''_{xx} Y''_{n-1} \int_\infty^\rho \frac{d\rho}{\rho^{n-t+2}} = -\frac{1}{\rho^{n-t+1}} \cdot \frac{D''_{xx} Y''_{n-1}}{n-t+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

di modo che le $(2)_1'$, $(2)''_1$ potranno ancora scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sum_0^\infty{}_n \rho^n \left\{ Y'_n + \frac{k(R^2-\rho^2) \cdot D'_{xx} Y'_n}{2(2+k)(n+t-1)\rho^2} \right\} = \\
&= \sum_0^\infty{}_n \rho^n \left\{ Y'_n + \frac{1-2t}{2(n+t-1)} \left(\frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right) D'_{xx} Y'_n \right\} = \\
&= \sum_0^\infty{}_n \rho^n \left\{ Y'_n + \frac{1-2t}{2} \left(\frac{R^2 \cdot D'_{xx} Y'_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xx} Y'_n}{n+t-1} \right) \right\}, \\
\eta &= \sum_0^\infty{}_n \rho^n \frac{1-2t}{2} \left(\frac{R^2 \cdot D'_{xy} Y'_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xy} Y'_n}{n+t-1} \right), \\
\zeta &= \sum_0^\infty{}_n \rho^n \frac{1-2t}{2} \left(\frac{R^2 \cdot D'_{xz} Y'_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xz} Y'_n}{n+t-1} \right);
\end{aligned}\right\} \quad (2)'_{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{\rho^{n+1}} \left\{ Y'_n - \frac{k(R^2-\rho^2) \cdot D''_{xx} Y''_n}{2(2+k)(n-t+2)\rho^2} \right\} = \\
&= \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{\rho^{n+1}} \left\{ Y''_n - \frac{1-2t}{2(n-t+2)} \left(\frac{R^2}{\rho^2} - 1 \right) D''_{xx} Y''_n \right\} = \\
&= \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{\rho^{n+1}} \left\{ Y''_n + \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xx} Y''_n}{n-t+2} - \frac{R^2 D''_{xx} Y''_{n-2}}{n-t} \right) \right\}, \\
\eta &= \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xy} Y''_n}{n-t+2} - \frac{R^2 D''_{xy} Y''_{n-2}}{n-t} \right), \\
\zeta &= \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xz} Y''_n}{n-t+2} - \frac{R^2 D''_{xz} Y''_{n-2}}{n-t} \right),
\end{aligned}\right\} \quad (2)''_{11}$$

con

$$D'_{xx} Y'_n = D'_{xy} Y'_n = D'_{xz} Y'_n = D''_{xx} Y''_{n-2} = D''_{xy} Y''_{n-2} = D''_{xz} Y''_{n-2} = 0 \text{ per } n = 0, 1.$$

4. Dalle (9) si ricava facilmente, derivando sotto il segno,

$$\left.\begin{aligned}
& Y'_n + \frac{1-2t}{2} \left(\frac{R^2 \cdot D'_{xx} Y'_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xx} Y'_n}{n+t-1} \right) = \\
&= \frac{2n+1}{4\pi R^{n+2}} \int_\sigma f_1 \left\{ P_n + \frac{1-2t}{2} \left(\frac{2n+5}{2n+1} \cdot \frac{D'_{xx} P_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xx} P_n}{n+t-1} \right) \right\} d\sigma = u'_n, \\
& \frac{1-2t}{2} \left(\frac{R^2 \cdot D'_{xy} Y'_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xy} Y'_n}{n+t-1} \right) = \\
&= \frac{2n+1}{4\pi R^{n+2}} \int_\sigma f_1 \left\{ \frac{1-2t}{2} \left(\frac{2n+5}{2n+1} \cdot \frac{D'_{xy} P_{n+2}}{n+t+1} - \frac{D'_{xy} P_n}{n+t-1} \right) \right\} d\sigma = v'_n, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\
& Y''_n + \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xx} Y''_n}{n-t+2} - \frac{R^2 \cdot D''_{xx} Y''_{n-2}}{n-t} \right) = \\
&= \frac{2n+1}{4\pi} R^{n-1} \int_\sigma f_1 \left\{ P_n + \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xx} P_n}{n-t+2} - \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{D''_{xx} P_{n-2}}{n-t} \right) \right\} d\sigma = u''_n, \\
& \left\{ \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xy} Y''_n}{n-t+2} - \frac{R^2 \cdot D''_{xy} Y''_{n-2}}{n-t} \right) \right. = \\
&= \frac{2n+1}{4\pi} R^{n-1} \int_\sigma f_1 \left\{ \frac{1-2t}{2} \left(\frac{D''_{xy} P_n}{n-t+2} - \frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{D''_{xy} P_{n-2}}{n-t} \right) \right\} d\sigma = v''_n, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (9)'$$

Scritte le $(2)'_{\text{II}}$, $(2)''_{\text{II}}$ nelle nuove forme:

$$\left.\begin{aligned} \xi = \sum_0^\infty {}_n\, \rho^n u'_n = \sum_0^\infty {}_n\, U_n, \qquad \eta = \sum_0^\infty {}_n\, \rho^n v'_n = \sum_0^\infty {}_n\, V_n, \\ \zeta = \sum_0^\infty {}_n\, \rho^n w'_n = \sum_0^\infty {}_n\, W_n; \end{aligned}\right\} \quad (2)'_{\text{III}}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi = \sum_0^\infty {}_n\, \frac{u''_n}{\rho^{n+1}} = \sum_1^\infty {}_n\, U_{-n}, \qquad \eta = \sum_0^\infty {}_n\, \frac{v''_n}{\rho^{n+1}} = \sum_1^\infty {}_n\, V_{-n}, \\ \zeta = \sum_0^\infty {}_n\, \frac{w''_n}{\rho^{n+1}} = \sum_1^\infty {}_n\, W_{-n}, \end{aligned}\right\} \quad (2)''_{\text{III}}$$

le formole $(9)'$ vengono a costituire una estensione, al caso delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, delle formole (9).

Osserviamo che *alle serie* $(2)'_{\text{III}}$, $(2)''_{\text{III}}$, come a quelle da cui esse dipendono, *è applicabile la derivazione per serie fino ad un ordine qualsiasi rispetto ad* x, y, z; che *le* U_n, V_n, W_n *sono funzioni razionali, intere, omogenee di grado* n *nelle* x, y, z, *integrali delle equazioni* (1); *le* U_{-n}, V_{-n}, W_{-n} *sono funzioni razionali, fratte, omogenee di grado* $-n$ *nelle* x, y, z, *integrali anch'esse delle equazioni* (1); e che *i coefficienti* u'_n, v'_n, w'_n; u''_n, v''_n, w''_n *sono esprimibile mediante i valori degli spostamenti alla superficie* σ *della sfera.*

Catania, Luglio 1901.

Sur une classe de séries infinies analogues à celles de Schlömilch selon les fonctions cylindriques.

(*Par* Niels Nielsen, *à Copenhague.*)

Dans deux Notes que j'ai eu l'honneur de présenter à l'*Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark* et qui viennent d'être publiées dans les *Bulletins* (*) de *l'Académie* j'ai étudié la série infinie

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{\left(\frac{s\,x}{2}\right)^{\mu}} \cdot \overset{\mu}{J}(s\,x) \qquad (\alpha)$$

et quelques autres séries déduites de celle-ci et dont les sommes possèdent un nombre de propriétés assez remarquables. Cependant ces recherches ne donnent aucune information sur la nature générale des séries selon des produits de deux fonctions cylindriques, séries qui peuvent représenter aussi, comme (α), le zéro dans un certain intervalle et que j'ai étudiées dans une autre Note récente (**).

Le Mémoire que voici est destiné à approfondir cette question, intéressante en elle-même, mais qui l'est particulièrement à cause des résultats remarquables relatives à la somme d'une telle série. En effet, *la somme susdite se présente exprimée sous forme finie à l'aide des intégrales elliptiques complètes ou à l'aide des intégrales hyperelliptiques selon que nous supposons un paramètre égal à un nombre entier ou à un nombre rationnel seulement.*

En outre j'ai trouvé un nombre de nouvelles formules intéressantes contenant les fonctions cylindriques ou plus généralement les fonctions entières souvent dites intégrales *besséliennes.*

(*) 1899, p. 661-665; 1900, p. 55-60.

(**) *Mathematische Annalen*, t. 52, p. 582-587; 1899.

Remarquons encore que les formules générales déduites dans les sections I, II prouvent la vérité de l'hypothèse que j'ai énoncée dans la première des Notes susdites, savoir *qu'il est possible de construire d'autres fonctions plus générales que* $\overset{\mu}{J}(x)$ *et qui fourniront des développements nouveaux du zéro.* En effet, les séries infinies que nous avons à étudier représentent généralement des fonctions *discontinues* dont la plupart possède un *domaine d'invariabilité* (Invariabilitätsbereich).

Du reste, il est bien remarquable que la tranchante dissidence connue pour les séries de la forme

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos s\omega}{s^p}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin s\omega}{s^{p+1}} \tag{β}$$

et quelques autres d'une forme analogue, selon que l'entier p désigne un nombre pair ou impair se continue opiniâtrément dans les séries plus générales que nous avons à traiter ici.

I.

Formules fondamentales relatives aux fonctions générales:

$$F(x) = \int_0^a \cos(x\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad \mathfrak{F}(x) = \int_0^a \sin(x\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

§ 1. Supposons que x soit une variable complexe, tandis que $f(\xi)$ désigne une fonction, généralement imaginaire, de la variable réelle ξ qui peut s'écrire sous cette forme

$$f(\xi) = \mathfrak{R} + i\,\mathfrak{J},$$

$\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ étant deux fonctions réelles, de manière que les deux intégrales

$$\int_0^a \frac{\sin n\xi}{\sin \xi} \cdot \mathfrak{R}\, d\xi, \quad \int_0^a \frac{\sin n\xi}{\sin \xi} \cdot \mathfrak{J}\, d\xi,$$

où a désigne une quantité réelle finie, se décomposent dans une somme des intégrales de Dirichlet.

Cela posé, il est clair que les deux fonctions

$$F(x) = \int_0^a \cos(x\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\mathfrak{F}(x) = \int_0^a \sin(x\xi) f(\xi)\, d\xi$$

où a désigne une quantité positive finie, seront des fonctions entières de x, dont les séries de puissances se présentent immédiatement sous cette forme

$$F(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots = \Sigma\, u_{2s}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{F}(x) = b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots = \Sigma\, v_{2s+1}, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^a \xi^{2n} f(\xi)\, d\xi, \tag{1_a}$$

$$b_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^a \xi^{2n+1} f(\xi)\, d\xi. \tag{2_a}$$

§ 2. Il existe quelques autres représentations analytiques de nos deux fonctions $F(x)$ et $\mathfrak{F}(x)$, représentations que l'on obtiendra en prenant pour point de départ les formules bien connues

$$\cos \mu\omega = \frac{\sin \mu\pi}{\pi} \left(\frac{1}{\mu} + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{\mu+s} + \frac{1}{\mu-s} \right) \cos s\omega \right), \tag{α}$$

$$\sin \mu\omega = \frac{\sin \mu\pi}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{\mu-s} - \frac{1}{\mu+s} \right) \sin s\omega, \tag{β}$$

qui sont valables dans l'intervalle $-\pi \leqq \omega \leqq +\pi$, les valeurs limites étant exclues pour la formule (β); μ désigne toujours une quantité finie quelconque. Posons maintenant dans ces deux formules $\mu = x$ et $\omega = \xi z$, multiplions les deux membres par $f(\xi)\, d\xi$ et intégrons ensuite terme à terme de $\xi = 0$ à $\xi = a$, ce qui est permis, nous aurons respectivement ces deux formules nouvelles :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot F(zx) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \frac{(-1)^s}{x+s} F(sz), \tag{3}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} \cdot \mathfrak{F}(zx) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \frac{(-1)^s}{x-s} \mathfrak{F}(sz), \tag{4}$$

qui sont valables dans l'intervalle $-\pi \leq a z < +\pi$, tandis que x désigne une quantité finie quelconque, réelle ou imaginaire. Les séries (3), (4) se présentent sous une forme très elégante pourvu que a ne soit plus grand que π, car dans ce cas on peut admettre $z = 1$.

A l'aide des formules analogues à (α), (β)

$$\left.\begin{aligned}\cos \mu \omega = \frac{\sin 2 \mu \pi}{2 \pi}\left(\frac{1}{\mu} + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\mu + s} + \frac{1}{\mu - s}\right)\cos s \omega\right) + \\ + \frac{\sin^2 \mu \pi}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\mu + s} - \frac{1}{\mu - s}\right)\sin s \omega,\end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin \mu \omega = \frac{\sin^2 \mu \pi}{\pi}\left(\frac{1}{\mu} + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\mu + s} + \frac{1}{\mu - s}\right)\cos s \omega\right) + \\ - \frac{\sin 2 \mu \pi}{2 \pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\mu + s} - \frac{1}{\mu - s}\right)\sin s \omega,\end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

valables dans l'intervalle $0 < \omega < 2\pi$, on aura de la même manière, après une légère modification

$$\pi \cot \pi x \, F(z x) + \pi \mathfrak{F}(z x) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \frac{F(s z)}{x + s}, \qquad (3_a)$$

$$\pi \cot \pi x \, \mathfrak{F}(z x) - \pi F(z x) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \frac{\mathfrak{F}(s z)}{x + s}, \qquad (4_a)$$

pourvu que $0 \leq a z \leq 2\pi$.

On généralise aisément les quatre formules (3), (4) en appliquant l'intégrale

$$\int_0^a \varphi(x \xi) f(\xi) \, d\xi,$$

$\varphi(\mu \omega)$ désignant une fonction développable en série de Fourier qui procède d'après les cosinus et les sinus des multiples de l'angle réel ω.

§ 3. Développant les deux membres de (3), (4) selon les puissances ascendantes de x, ou aura, en égalant les coefficients de la même puissance de x, ces deux formules remarquables

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n}} \cdot F(s z) = \sum_{p=0}^{p=n} \sigma_{2n-2p} \cdot u_{2p}, \qquad (5)$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n+1}} \cdot \mathfrak{F}(s z) = \sum_{p=0}^{p=n} \sigma_{2n-2p} \cdot v_{2p+1}, \qquad (6)$$

où u et v désignent les termes correspondants des séries (1), (2) si nous y posons z au lieu de x, tandis que l'on a posé

$$\sigma_r = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^r}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2},$$

r désignant un positif entier. Les deux formules (5), (6) sont valables aussi pourvu que

$$-\pi \leq a\,z \leq +\pi.$$

A l'aide des formules (3_a), (4_a) on aura de la même manière

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{F(s\,z)}{s^{2n}} = \sum_{p=0}^{p=n-1} s_{2n-2p} \cdot u_{2p} + \frac{(-1)^n}{2} (\pi\, v_{2n-1} - u_{2n}), \tag{5_a}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{F}(s\,z)}{s^{2n+1}} = \sum_{p=0}^{p=n-1} s_{2n-2p} \cdot v_{2p+1} + \frac{(-1)^n}{2} (\pi\, u_{2n} - v_{2n+1}), \tag{6_a}$$

qui sont valables dans l'intervalle $0 \leq a\,z \leq 2\,\pi$; s_r désigne la série obtenue de σ_r en y supprimant le facteur $(-1)^{s-1}$ figurant sous le signe Σ.

Les quatre formules (5), (6) peuvent être démontrées aisément aussi à l'aide des séries trigonométriques bien connues. On aura en outre par ce procédé les deux autres formules analogues suivantes:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s F[(2\,s+1)\,x]}{(2\,s+1)^{2n+1}} = \sum_{p=0}^{p=n} \tau_{2n-2p+1} \cdot u_{2p}, \tag{5_b}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathfrak{F}[(2\,s+1)\,x]}{(2\,s+1)^{2n}} = \sum_{p=1}^{p=n} \tau_{2n-2p+1} \cdot v_{2p-1}, \tag{6_b}$$

qui sont valables dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq a\,z \leq +\frac{\pi}{2}$, et où l'on a posé

$$\tau_r = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2\,s+1)^r}, \quad r \geq 1.$$

Multiplions encore par $\sin \pi\, x$ les deux équations (3), (4), développons les deux membres selon les puissances ascendantes de x, nous aurons les coefficients a_{2n}, b_{2n+1} écrites comme des fonctions linéaires d'un nombre limité des séries infinies figurant au premier membre de (5) et (6).

Les sommes des six séries infinies traitées dans ce paragraphe représentent des fonctions *discontinues*. En appliquant la méthode expliquée dans la section II, on pourra trouver les sommes en question pour *une valeur réelle finie quelconque de l'argument z*. Or, les expressions ainsi trouvées, contenant des intégrales définies, ne présentent généralement qu'un intérêt médiocre.

§ 4. Études maintenant les séries infinies qui correspondent à (5), (5_a), (6_b) pour $n = 0$. En premier lieu, prenons pour point de départ la formule élémentaire

$$\left.\begin{aligned} &\cos u - \cos 2u + \cos 3u - \cdots + (-1)^{n-1}\cos nu = \frac{1}{2} - \\ &\qquad - \frac{(-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}u}{2\cos\frac{u}{2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

nous aurons, après une légère modification de l'intégrale définie ainsi obtenue

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s-1} F(sx) = \frac{1}{2}F(0) - \\ &\qquad - \frac{(-1)^n}{2x}\cdot\int_0^{ax} \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\xi}{\cos\frac{\xi}{2}} f\left(\frac{\xi}{x}\right) d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Cela posé, faisons croître à l'infinie le positif entier n, nous aurons, en vertu du théorème de Dirichlet:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} F(sx) = \frac{1}{2}F(0), \qquad (7)$$

formule qui est valable dans les intervalles

$$-\pi < ax < 0, \quad 0 < ax < +\pi. \qquad (\gamma)$$

Dans le cas exclu, où x est très petit, la série qui figure au premier membre de (7) aura généralement une somme indéterminée oscillante entre les deux quantités 0 et $F(0)$.

Supposons maintenant ax situé hors de l'intervalle (γ), savoir

$$(2q-1)\pi < ax < (2q+1)\pi,$$

il faut trancher à l'aide des intervalles très petits les multiples impairs de π situés entre 0 et ax. Cela posé, nous verrons, en vertu du théorème de Dirichlet, que notre intégrale prise sur les intervalles qui restent donnera toujours zéro; l'intégrale prise sur l'intervalle enfermant le point critique $(2p-1)\pi$ deviendra au contraire

$$J_p = -\frac{\pi}{x} f\left(\frac{(2p-1)\pi}{x}\right). \qquad (\delta)$$

Dans le cas particulier $a x = (2q - 1)\pi$, la limite supérieure de notre intégrale est un point critique elle-même, ce qui donnera

$$J_q = -\frac{\pi}{2x} f(a).$$

Pour x négatif notre intégrale peut être traitée de la même manière, de sorte que nous aurons généralement

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} F(sx) = \frac{1}{2} F(0) - \frac{\pi}{|x|} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' f\left(\frac{(2p-1)\pi}{|x|}\right), \qquad (7_a)$$

où

$$(2q-1)\pi \leqq |ax| < (2q+1)\pi,$$

et où l'accent après le signe Σ indique qu'il faut prendre la moitié du dernier terme, pourvu que $|ax|$ soit égal à $(2q-1)\pi$.

Appliquant ensuite la formule déduite de (α) en y posant $\pi - u$ au lieu de u, on aura de la même manière

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} F(sx) = -\frac{1}{2} F(0) + \frac{\pi}{2x} f(0), \qquad (8)$$

pourvu que $0 < ax < 2\pi$; pour $x = 0$, la série infinie correspondante est généralement divergente. Dans le cas générale

$$2q\pi \leqq |ax| < (2q+2)\pi,$$

on aura de même

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} F(sx) = -\frac{1}{2} F(0) + \frac{\pi}{|x|} \cdot \sum_{p=0}^{p=q}{}' f\left(\frac{2p\pi}{|x|}\right), \qquad (8_a)$$

où l'accent après le signe Σ indique qu'il faut prendre la moitié des termes qui correspondent à $p = 0$ et à $p = q$ pourvu que $|ax|$ soit égal à $2q\pi$.

Enfin, la formule

$$\sin u - \sin 3u + \sin 5u - \cdots + (-1)^n \sin(2n+1)u =$$

$$= (-1)^n \frac{\sin(2n+2)u}{2\cos u}$$

donnera encore

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \mathfrak{F}\left((2s+1)x\right) = 0, \qquad (9)$$

pourvu que $-\frac{\pi}{2} < ax < +\frac{\pi}{2}$, et généralement

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \mathfrak{F}\left((2s+1)x\right) = \frac{\pi}{2x} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' (-1)^{p-1} f\left(\frac{(2p-1)\pi}{|2x|}\right), \qquad (9_a)$$

où l'on suppose

$$(2q-1)\pi < |2ax| < (2q+1)\pi,$$

et où l'accent désigne qu'il faut prendre la moitié du dernier terme, pourvu que $|2ax| = (2q-1)\pi$.

Donnons encore ces deux formules intéressantes:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \cdot F\Big((2s+1)x\Big) = \frac{\pi}{4} F(0), \quad -\frac{\pi}{2} < ax < +\frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{2s+1} \cdot \mathfrak{F}\Big((2s+1)x\Big) = \frac{\pi}{4} F(0), \quad 0 < ax < \pi, \tag{10$_a$}$$

analogues aux formules bien conues qui développent $\frac{\pi}{4}$ selon les cosinus ou les sinus des multiples impairs d'un angle réel.

Les sommes des trois séries infinies figurant dans les formules (7), (8), (9) sont aussi des fonctions *discontinues* de la variable réelle x. En effet, faisons varier x, les fonctions en question sautent brusquement quand x surpasse un multiple impair de π, un multiple pair de π ou un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ respectivement. Dans l'intervalle dépuis ce point critique jusqu'au point critique suivant nos séries représentent des fonctions continues mais différentes de celles qu'elles viennent de représenter dans le domaine de continuité (Continuitätsbereich) précédent et ainsi de suite.

Les séries (7), (9) possèdent en outre la propriété remarquable d'avoir un *domaine d'invariabilité* (Invariabilitätsbereich) dans l'intervalle dépuis $-\pi$ jusqu'à $+\pi$ ou dépuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$ respectivement. *La valeur constante de la somme de la dernière série est toujours zéro; c'est la même chose pour la somme de la première série, pourvu que $F(0)$ soit égal à zéro.*

II.

Formules fondamentales relatives aux fonctions générales:

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \omega \sin \varphi) f(\omega, \varphi) \, d\varphi \, d\omega,$$

$$\mathfrak{G}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos \omega \sin \varphi) f(\omega, \varphi) \, d\varphi \, d\omega.$$

§ 5. En faisant sur la fonction $f(\omega, \varphi)$, regardée comme fonction de φ, les mêmes hypothèses que nous avons expliquées au § 1, et en supposant en outre que l'intégrale double

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\omega, \varphi) \, d\varphi \, d\omega$$

ait un sens, on verra que les deux fonctions

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \omega \sin \varphi) f(\omega, \varphi) \, d\varphi \, d\omega,$$

$$\mathfrak{G}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos \omega \sin \varphi) f(\omega, \varphi) \, d\varphi \, d\omega$$

sont aussi des fonctions entières, analogues à $F(x)$ et $\mathfrak{F}(x)$ respectivement. En effet, il est évident que dans les formules démontrées aux §§ 2, 3 nous pouvons toujours mettre $G(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$ au lieu de $F(x)$ et $\mathfrak{F}(x)$ respectivement. Cela posé, nous n'avons qu'à étudier les séries analogues à celle du § 4.

Or, appliquant la même méthode, on aura ici:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}G(sx)=\frac{1}{2}G(0)-$$

$$-\frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\cos\omega\sin\varphi\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\cos\omega\sin\varphi\right)}\cdot f(\omega,\varphi)\,d\varphi\,d\omega,$$

ou bien, après avoir posé $\varphi=\operatorname{arc}\sin\left(\frac{\alpha}{x\cos\omega}\right)$,

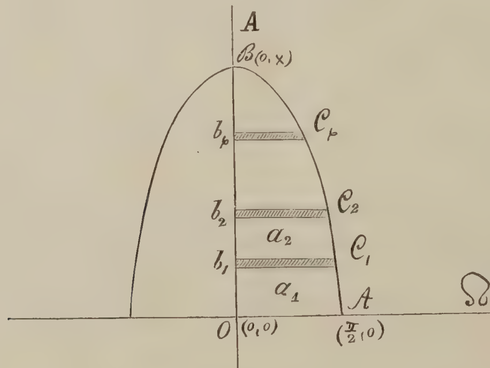
arcsinus désignant un angle situé entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^{s-1}G(sx)=\frac{1}{2}G(0)-\\ \displaystyle-\frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x\cos\omega}\frac{f\left(\omega,\operatorname{arc}\sin\left(\frac{\alpha}{x\cos\omega}\right)\right)}{\sqrt{x^2\cos^2\omega-\alpha^2}}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,d\omega\,d\alpha,\end{array}\right\}\quad(\alpha)$$

de sorte qu'il s'agit de déterminer la valeur de cette dernière intégrale double si nous faisons croître au delà de toute limite le positif entier n.

§ 6. Pour présenter ces circonstances avec plus de clarté traçons une partie de la courbe dont l'équation en coordonnées rectangles est

$\alpha=x\cos\omega$, comme voici:



Or, nous verrons qu'il s'agit de trouver la valeur de notre intégrale double prise sur l'aire $A\,O\,B$ limitée par les axes des coordonnées et de l'arc $A\,B$ de la courbe susdite. Supposons à cet égard que

$$(2\,q-1)\,\pi < x < (2\,q+1)\,\pi,$$

q étant un positif entier et fixons sur l'arc $A\,B$ les points $C_1\ C_2\ \ldots\ C_q$ ayant les coordonnées

$$\omega = \arc\cos\frac{(2\,p-1)\,\pi}{x}, \quad \alpha = \frac{(2\,p-1)\,\pi}{x}, \quad p = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ q.$$

Cela posé, tranchons les points C_p à l'aide des canals étroits dont les bords sont des lignes droites parallèles à l'axe Ω, de sorte que celles qui correspondent au point C_p ont les équations suivantes

$$\alpha_p = \frac{(2\,p-1)\,\pi - \delta_p}{x}, \quad \alpha'_p = \frac{(2\,p-1)\,\pi + \varepsilon_p}{x},$$

δ_p, ε_p désignant des quantités positives, très petites et destinées à décroître infiniment. De cette manière nous aurons l'aire $O\,A\,B$ décomposée en plusieurs autres, savoir des aires b_p limitées par α_p et α'_p et des aires a_p situées entre les bords α'_p et α_{p+1} (a_1 entre l'axe Ω et α_1). Or, il est évident que tous les points critiques se trouvent dans les aires hachées b.

Faisons maintenant croître au delà de toute limite le positif entier n, tandis que les quantités δ_p, ε_p s'évanouiront mais de manière que tous les produits $n\,\delta_p$, $n\,\varepsilon_p$ auront des valeurs infiniment grandes. Appliquons ensuite le théorème de Dirichlet, nous verrons que notre intégrale double prise sur les aires a_p s'évanouit, car l'intégration effectuée par rapport à α donnera toujours zéro. L'intégrale prise sur b_p donnera au contraire

$$J_p = -\frac{\pi}{x}\int_0^{\arc\cos\frac{(2p-1)\pi}{x}} \frac{f\left(\omega,\ \arc\sin\frac{(2\,p-1)\,\pi}{x\cos\omega}\right)}{\sqrt{x^2\cos^2\omega-(2\,p-1)^2\,\pi^2}}\,d\,\omega. \qquad (\beta)$$

Or, posons

$$\omega = \arc\sin\,(k_p\,\beta), \quad k_p = \sqrt{1-\frac{(2\,p-1)^2\,\pi^2}{x^2}},$$

nous aurons

$$J_p = -\frac{\pi}{x}\int_0^1 \frac{f\left(\arc\sin k_p\,\beta,\ \arc\sin\sqrt{\frac{1-k_p^2}{1-k_p^2\,\beta^2}}\right)}{\sqrt{(1-\beta^2)\,(1-k_p^2\,\beta^2)}}\,d\,\beta. \qquad (\gamma)$$

§ 7. Il nous reste encore d'étudier le cas particulier $x = (2q - 1)\pi$, cas où le sommet B de la courbe susdite deviendra aussi un point critique, de sorte que nous avons à déterminer la valeur de notre intégrale double prise sur une aire très petite située immédiatement au-dessous de B et dont les limites seront de $\alpha = x - \varepsilon$ à $\alpha = x$ et de $\omega = 0$ à $\omega = \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)$, où ε désigne une quantité positive et très petite, ce qui donnera pour notre intégrale cette expression

$$J'_q = -\frac{(-1)^n}{2}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}\int\limits_{0}^{\arccos\frac{\alpha}{x}} \frac{f\left(\omega, \arcsin\frac{\alpha}{x\cos\omega}\right)}{\sqrt{x^2\cos^2\omega - \alpha^2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\, d\omega\, d\alpha.$$

Posons maintenant

$$\alpha = (2q - 1)\pi - \gamma, \quad \omega = \arcsin k\beta,$$

où

$$k = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\gamma}{x}\right)^2},$$

nous aurons, en appliquant de nouveau le théorème de Dirichlet.

$$J'_q = -\frac{\pi}{2x} f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \int\limits_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

ce qui est précisément la moitié de l'intégrale obtenue de (γ) en y posant $p = q$.

§ 8. Les résultats que nous venons d'obtenir dans les deux paragraphes précédents peuvent être résumés dans la formule suivante:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1} G(sx) = \frac{1}{2} G(0) - \frac{\pi}{|x|} \cdot \sum_{p=0}^{p=q}{}' \int\limits_0^1 \frac{\varphi(k_p, z)}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_p^2 z^2)}}\, dz, \quad (11)$$

où l'on a posé

$$\varphi(\lambda, z) = f\left(\arcsin\lambda z, \arcsin\sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 z^2}}\right),$$

et où

$$(2q - 1)\pi \leqq |x| < (2q + 1)\pi,$$

tandis que l'accent après le signe Σ indique qu'il faut prendre la moitié du

dernier terme, pourvu que $|x| = (2q-1)\pi$. Généralement la série (11) n'a pas une somme déterminée pour $x = 0$.

Nous aurons de la même manière cette autre formule

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} G(s\,x) = -\frac{1}{2}\,G(0) + \frac{\pi}{|x|}\cdot\sum_{p=0}^{p=q}{}' \int_0^1 \frac{\varphi(l_p, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-l_p^2 z^2)}}\,d\,z, \tag{12}$$

où

$$2\,q\,\pi \leqq |x| < (2\,q+2)\,\pi,$$

tandis que l'on a posé

$$l_p = \sqrt{1 - \frac{4\,p^2\,\pi^2}{x^2}}.$$

Dans cette formule l'accent désigne qu'il faut prendre la moitié des termes qui correspondent à $p = 0$ et à $p = q$, pourvu que $|x| = 2\,q\,\pi$. Il est bien remarquable que la convergence de la série (12) exige en outre que l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\omega, 0)}{\cos\omega}\,d\,\omega \tag{α}$$

ait un sens. Généralement notre série est divergente pour $x = 0$.

Enfin, nous aurons

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s\,\mathfrak{G}\Big((2\,s+1)\,x\Big) = \frac{\pi}{2\,x}\cdot\sum_{p=1}^{p=q}{}'(-1)^{p-1}\int_0^1 \frac{\varphi(m_p, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-m_p^2 z^2)}}\,d\,z, \tag{13}$$

pourvu que

$$(2\,q-1)\,\pi \leqq |2\,x| < (2\,q+1)\,\pi,$$

tandis que l'on a posé

$$m_p = \sqrt{1 - \frac{(2\,p-1)^2\,\pi^2}{4\,x^2}}.$$

Il est évident que les séries que nous venons d'étudier possèdent précisément les propriétés expliquées à la fin de § 4; c'est la même chose pour les fonctions obtenues par un amoncellement continué des intégrations.

Remarquons encore que nos trois dernières formules peuvent être déduites aussi à l'aide de celles du § 4 par une intégration. Or, les recherches nécessaires sur les termes de reste des séries en question seront précisément les mêmes que nous venons d'accomplir.

III.

Application de la fonction $\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x)$ (*).

§ 9. La fonction de trois variables

$$\overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+s+1\right)} \qquad (\alpha)$$

qui joue un rôle assez considérable dans la théorie des fonctions cylindriques nous présente un exemple d'une portée très étendue de nos fonctions générales $G(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$. En effet, supposons que nous ayons à la fois

$$\Re(\nu \mp \mu) > 0, \quad \Re(\nu \pm \mu) > -1, \qquad (\beta)$$

nous démontrerons aisément ces deux formules remarquables

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \overset{\mu,\nu}{\Pi}(x) = \frac{4\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu\mp\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu\pm\mu+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\omega\sin\varphi)(\cos\varphi)^{\nu\pm\mu} \cdot (\sin\omega)^{\nu\mp\mu-1} \cos\omega\, d\omega\, d\varphi,$$

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \overset{\mu,\nu+1}{\Pi}(x) = \frac{4\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)}{\Gamma\left(\frac{\nu\mp\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu\pm\mu+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\omega\sin\varphi)(\cos\varphi)^{\nu\pm\mu} \cdot (\sin\omega)^{\nu\mp\mu-1} \cos\omega\, d\omega\, d\varphi,$$

(*) Les désignations appliquées dans cette section et dans la section suivante sont les mêmes que j'ai introduites dans mon Mémoire récent: *Évaluation nouvelle* etc. Ce Journal, 3e série, t. VI.

de sorte que nous aurons dans ce cas:

$$\frac{\varphi(\lambda,\ z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}}=\frac{\lambda^{2\nu-1}\ z^{\nu\mp\mu-1}\ (1-z^2)^{\frac{\nu\pm\mu-1}{2}}}{(1-\lambda^2 z^2)^{\frac{\nu\pm\mu}{2}}},$$

abstraction faite du facteur figurant au second membre hors des signes d'intégration.

Cela posé, on aura immédiatement, en développant le dénominateur selon la formule du binôme, ces trois formules:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s-1}\,\overset{\mu,\nu}{\Pi}(s\,x)}{\left(\frac{s\,x}{2}\right)^{\nu}}=E(\mu,\ \nu)-\\&-\frac{2\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cdot|x|}\cdot\sum_{p=1}^{p=q}{}' k_p^{2\nu-1}\cdot F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2},\nu+\frac{1}{2},k_p^2\right),\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\overset{\mu,\nu}{\Pi}(s\,x)}{\left(\frac{s\,x}{2}\right)}=-E(\mu,\ \nu)+\\&+\frac{2\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cdot|x|}\cdot\sum_{p=0}^{p=q}{}' l_p^{\nu-1}\cdot F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2},\nu+\frac{1}{2},l_p^2\right),\end{aligned}\right\}\quad(14_a)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\overset{\mu,\nu+1}{\Pi}\left((2s+1)x\right)}{\left(\frac{2\,s+1}{2}\,x\right)^{\nu}}=\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cdot x}\cdot\sum_{p=1}^{p=q}{}'(-1)^{p-1}\,m_p^{2\nu-1}\cdot\\&\cdot F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ m_p^2\right),\end{aligned}\right\}\quad(14_b)$$

où F désigne la fonction hypergéométrique ordinaire et où l'on a posé

pour abréger

$$E(\mu, \nu) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} (\mu - \nu)}{2\,\Gamma\left(\frac{\nu + \mu}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu - \mu}{2} + 1\right)}.$$

Les formules (14), (14_b) sont valables pourvu que les conditions (β) soient remplies, tandis que (14_a) exige ces conditions plus étroites

$$\Re(\nu \mp \mu) > 1, \quad \Re(\nu \pm \mu) > 0. \tag{γ}$$

Il est évident que des formules générales (14) on peut déduire une foule d'autres plus particulières dont nous avons à étudier les plus intéressantes. Or, dans certaines des formules ainsi obtenues, les deux conditions susdites (β) et (γ) peuvent être beaucoup modifiées, nous le verrons bientôt.

§ 10. Posons en premier lieu $\nu = \mu - 2n$, n désignant un entier non négatif, nous verrons que Π déviendra identique à la fonction cylindrique $\overset{\mu}{J}(x)$, de sorte que nous obtiendrons par là ces trois formules:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} \overset{\mu}{J}(sx)}{\left(\frac{sx}{2}\right)^{\mu-2n}} &= E_n - \frac{(-1)^n\, 2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\mu - 2n + \frac{1}{2}\right)|x|} \, . \\ &\cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' k_p^{2\mu-4n-1} \, . \, F\left(\mu - n, \, -n, \, \mu - 2n + \frac{1}{2}, \, k_p^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\overset{\mu}{J}(sx)}{\left(\frac{sx}{2}\right)^{\mu-2n}} &= -E_n + \frac{(-1)^n\, 2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\mu - 2n + \frac{1}{2}\right)|x|} \, . \\ &\cdot \sum_{p=0}^{p=q}{}' l_p^{2\mu-4n-1} \, . \, F\left(\mu - n, \, -n, \, \mu - 2n + \frac{1}{2}, \, l_p^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{15_a}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \overset{\mu}{J}[(2s+1)x]}{\left(\frac{2s+1}{2}\, x\right)^{\mu-2n-1}} &= \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\mu - 2n - \frac{1}{2}\right) \cdot x} \, . \\ &\cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' (-1)^{p-1} m_p^{2\mu-4n-1} \, . \, F\left(\mu - n, \, -n, \, \mu - 2n - \frac{1}{2}, \, m_p^2\right), \end{aligned}\right\} \tag{15_b}$$

où l'on a posé

$$E_0 = \frac{1}{2\,\Gamma(\mu + 1)}, \quad E_n = 0, \quad n > 0.$$

Or, je dis que *ces formules sont valables pourvu que l'on ait dans les deux premières* $\Re(\mu - 2n) > -\frac{1}{2}$ *et dans la dernière* $\Re(\mu - 2n) > \frac{1}{2}$.

La démonstration de cette assertion peut être effectuée de la manière suivante:

Fixons une valeur déterminée mais quelconque de μ satisfaisant aux conditions susdites, posons ensuite $\nu = \mu - 2n$ ou $\nu = \mu - 2n - 1$ respectivement. Cela posé, appliquons la valeur asymptotique

$$\overset{\mu}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left[-x + \frac{\pi}{2}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\right],$$

valable pour les valeurs positives et extrêmement grandes de x, nous verrons que les termes très éloignés des séries infinies figurant aux premiers membres des formules (15) se présentent asymptotiquement sous la forme

$$a_n . \cos(-nx + \alpha),$$

où les coefficients a_n tendent vers zéro quand l'indice n croît à l'infini. Or, appliquons deux fois une méthode bien connue (*), nous verrons que nos séries infinies en question représentent des fonctions entières de μ.

Quant aux seconds membres des mêmes formules, ils représentent toujours des fonctions entières de μ, pourvu que x ne soit pas égal à un multiple de $\frac{\pi}{2}$ qui fait les modules k, l, m égaux à zéro, et cela suffit, car les deux groupes des fonctions sont identiques deux à deux dans un domaine de la partie du plan des μ où elles sont toutes des fonctions holomorphes.

C'est la formule (15) que j'ai étudiée dans mes deux Notes insérées dans les *Bulletins de l'Académie de Danemark*; elle montre évidemment *qu'un développement de la forme*

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \Sigma\, a_n \overset{\mu}{J}(nx)$$

valable dans l'intervalle $0 < x < \pi$ *peut être effectué d'une infinité de façons, pourvu que* $\Re(\mu) > \frac{3}{2}$, *de sorte que les généralisations des séries schlœmilchiennes données par* LOMMEL (**) *possèdent précisément cette propriété.*

(*) Voir par exemple M. PICARD: *Traité d'Analyse*, t. I, p. 231; Paris 1891.

(**) *Studien über die Bessel'schen Functionen*, p. 75; Leipzig 1868.

Pour la fonction

$$\overset{\mu}{\mathfrak{J}}(x) = D_\mu \overset{\mu}{J}(x) - \overset{\mu}{J}(x) \log \frac{x}{2}$$

on déduit immédiatement des formules analogues à (15) en différentiant par rapport à μ ces formules, ce qui est permis. Nous aurons par exemple

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} \overset{0}{\mathfrak{J}}(s x) = \frac{1}{2} C, \quad -\pi \leqq x \leqq \pi, \tag{16}$$

où C désigne la constante d'Euler, tandis que l'application de la formule (10) donnera de même

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \overset{0}{\mathfrak{J}}[(2s+1)x]}{2s+1} = \frac{\pi}{2} C, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}. \tag{16$_a$}$$

Appliquant ensuite la fonction de Schläfli

$$\overset{n}{U}(x) = C \overset{n}{J}(x) - \overset{n}{\mathfrak{J}}(x),$$

on aura ces deux nouveaux développements du zéro:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} \overset{0}{U}(s x) = 0, \quad -\pi < x < +\pi, \tag{17}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \overset{0}{U}[(2s+1)x]}{2s+1} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}. \tag{17$_a$}$$

Pour les valeurs plus grandes que zéro du paramètre n les séries de fonctions U ne peuvent jamais représenter le zéro dans un intervalle fini.

§ 11. Posons en second lieu $\nu = 0$, nous aurons, en vertu des formules générales (14):

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} \overset{\mu}{\Pi}(s x) = \frac{\sin \mu \pi}{2 \mu \pi} - \frac{2 \cos \frac{\mu \pi}{2}}{|x|} \cdot \sum_{p=1}^{p=q} \frac{\cos(\mu \arcsin k_p)}{k_p}, \tag{18}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{\mu}{\Pi}(s x) = -\frac{\sin \mu \pi}{2 \mu \pi} + \frac{2 \cos \frac{\mu \pi}{2}}{|x|} \cdot \sum_{p=0}^{p=q} \frac{\cos(\mu \arcsin l_p)}{l_p}, \tag{18$_a$}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{\mu}{X}\Big((2s+1)x\Big) = \frac{\sin \frac{\mu \pi}{2}}{x} \cdot \sum_{p=1}^{p=q} \frac{(-1)^{p-1} \cos(\mu \arcsin m_p)}{m_p}. \tag{18$_b$}$$

Posons encore dans (14), (14_a) $\nu = 1$, nous aurons de même

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} \overset{\mu}{X}(s x)}{s} &= \frac{\sin \mu \pi}{1-\mu^2} \cdot \frac{x}{4\pi} - \\ &- \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\sin \frac{\pi \mu}{2}}{\mu} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' \sin(\mu \arcsin k_p)\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\overset{\mu}{X}(s x)}{s} &= -\frac{\sin \mu \pi}{1-\mu^2} \cdot \frac{x}{4\pi} + \\ &+ \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\sin \frac{\mu \pi}{2}}{\mu} \cdot \sum_{p=0}^{p=q}{}' \sin(\mu \arcsin l_p).\end{aligned}\right\} \quad (19_a)$$

Ces formules (18), (19) ne sont démontrées que pour des limites assez étroites du paramètre μ; or, appliquant les deux expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\mu}{\Pi}(x) &= \frac{2 \cos \frac{\mu \pi}{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \omega) \cos \mu \omega \, d\omega, \\ \overset{\mu}{X}(x) &= \frac{2 \sin \frac{\mu \pi}{2}}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos \omega) \cos \mu \omega \, d\omega,\end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

on verra que les formules en question sont valables pour toutes les valeurs finies de ce paramètre.

Remarquant que $\overset{2n}{\Pi}(x)$, $\overset{2n+1}{X}(x)$ se réduisent à $\overset{2n}{J}(x)$ ou à $\overset{2n+1}{J}(x)$, pourvu que n soit un entier, on aura, en vertu de (19), (19_a):

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} \overset{1}{J}(s x)}{s} = \frac{x}{4} - 2 \operatorname{sgn} x \,.\, \sum_{p=1}^{p=q}{}' k_p\,, \quad (20)$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\overset{1}{J}(s x)}{s} = -\frac{x}{4} + 2 \operatorname{sgn} x \,.\, \sum_{p=0}^{p=q}{}' l_p\,. \quad (20_a)$$

Appliquant en outre les formules

$$2 D_\mu \overset{\mu}{\Pi}(x)_{\mu=2n} = -\overset{2n}{T}(x), \quad 2 D_\mu \overset{\mu}{X}(x)_{\mu=2n+1} = \overset{2n+1}{T}(x),$$

$$2 \pi D_\mu \overset{\mu}{X}(x)_{\mu=2n} = \overset{2n}{\Omega}(x), \quad 2 \pi D_\mu \overset{\mu}{\Pi}(x)_{\mu=2n+1} = -\overset{2n+1}{\Omega}(x),$$

n désignant un entier non négatif, on forme aisément, en vertu de (18), (19), des séries contenant les fonctions T, Ω. On aura par exemple de (19), (19_a) ces deux formules remarquables

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1} \overset{0}{\Omega}(s x)}{s} = \frac{x}{2} - 2\pi \operatorname{sgn} x \,.\, \sum_{p=1}^{p=q}{}' \arc\cos\left(\frac{(2p-1)\pi}{|x|}\right), \tag{21}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\overset{0}{\Omega}(s x)}{s} = -\frac{x}{2} + 2\pi \operatorname{sgn} x \,.\, \sum_{p=0}^{p=q}{}' \arc\cos\left(\frac{2p\pi}{|x|}\right). \tag{21_a}$$

Ajoutons ensuite les formules (19), (19_a), nous aurons encore ces deux nouveaux développements du zéro:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\overset{2n}{\Omega}[(2s+1)x]}{2s+1} = 0, \tag{22}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\overset{2n+1}{T}[(2s+1)x]}{2s+1} = 0, \tag{22_a}$$

qui sont valables tous les deux dans l'intervalle $0 < x < \pi$ et pourvu que $n > 0$.

IV.

Appliquation des intégrales besséliennes regardées comme fonctions du paramètre.

§ 12. Les deux formules

$$\overset{\mu}{\Pi}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin\omega)\cos\mu\omega\, d\omega,$$

$$\overset{\mu}{X}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x \sin\omega)\sin\mu\omega\, d\omega$$

montrent que $\overset{\mu}{\Pi}(x)$, $\overset{\mu}{X}(x)$ regardées comme fonctions de μ nous présentent un exemple des fonctions générales $F(x)$ et $\mathfrak{F}(x)$. Appliquons ensuite les formu-

les générales du § 4, nous aurons dans ce cas

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\overset{\mu s}{\Pi}(x)=\frac{1}{2}\overset{0}{J}(x)-\frac{1}{|\mu|}\sum_{p=1}^{p=q}{}'\cos\left(x\sin\frac{(2p-1)\pi}{\mu}\right), \tag{23}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}\overset{\mu s}{\Pi}(x)=-\frac{1}{2}\overset{0}{J}(x)+\frac{1}{|\mu|}\cdot\sum_{p=0}^{p=q}{}'\cos\left(x\sin\frac{2p\pi}{\mu}\right), \tag{23$_a$}$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s}\overset{\mu(2s+1)}{X}(x)=\frac{1}{|2\mu|}\cdot\sum_{p=1}^{p=q}{}'(-1)^{p-1}\sin\left(x\sin\frac{(2p-1)\pi}{2\mu}\right), \tag{23$_b$}$$

formules qui sont valables dans les intervalles

$$2q-1\leqq|\mu|<2q+1,$$
$$2q\leqq|\mu|<2q+2,$$
$$2q-1\leqq|2\mu|<2q+1$$

respectivement.

L'application des formules (10), (10_a) se simplifie à l'aide des formules (γ) du § 11, on aura:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\cdot\frac{\overset{\mu(2s+1)}{\Pi}(x)}{\cos\frac{2s+1}{2}\mu\pi}=\frac{\pi}{4}\overset{0}{J}(x)\quad -1\leqq\mu\leqq+1, \tag{24}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\cdot\frac{\overset{\mu(2s+1)}{X}(x)}{\sin\frac{2s+1}{2}\mu\pi}=\frac{1}{4}\overset{0}{\Omega}(x)\quad 0<\mu<2, \tag{24$_a$}$$

formules qui se présentent sous une forme élégante pour $\mu=1$.

Supposant dans (23), (23_a) μ égal à l'entier pair non négatif $2n$ et dans (23_b) μ égal à l'entier impair $2n+1$, on aura respectivement, après une légère modification

$$\overset{0}{J}(x)+2\sum_{s=1}^{p=\infty}(-1)^s\overset{2ns}{J}(x)=\frac{2}{n}\cdot\sum_{p=1}^{\leqq\frac{n+1}{2}}{}'\cos\left(x\sin\frac{(2p-1)\pi}{2n}\right), \tag{25}$$

$$\overset{0}{J}(x)+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\overset{2ns}{J}(x)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cdot\sum_{p=1}^{\leqq\frac{n}{2}}{}'\cos\left(x\sin\frac{p\pi}{n}\right), \tag{25$_a$}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\overset{(2n+1)(2s+1)}{J}(x)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_{p=1}^{p=n+1}(-1)^{p-1}\sin\left(x\sin\frac{(2p-1)\pi}{4n+2}\right), \tag{25$_b$}$$

où les accents après les signes Σ figurant au second membre indiquent qu'il

faut prendre la moitié des termes qui correspondent aux limites supérieures des ces sommations, pourvu qu'elles soient des nombres entiers. Ces trois formules (25) représentent des généralisations des développements bien connus de $\cos x$, 1, $\sin x$ selon les fonctions cylindriques. Du reste, elles peuvent être déduites aussi à l'aide des séries de FOURIER obtenues pour les deux fonctions $\cos(x \sin \omega)$, $\sin(x \sin \omega)$ et qui appartiennent à JACOBI (*).

L'application des formules

$$\overset{2n}{\Omega}(x) = \int_0^\pi \sin(x \sin \omega) \cos 2n\omega \, d\omega,$$

$$\overset{2n+1}{\Omega}(x) = -\int_0^\pi \cos(x \sin \omega) \sin(2n+1)\omega \, d\omega$$

donnera de même

$$\overset{0}{\Omega}(x) + 2\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \overset{2ns}{\Omega}(x) = \frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{p=1}^{\leq \frac{n+1}{2}}{}' \sin\left(x \sin \frac{(2p-1)\pi}{2n}\right), \quad (26)$$

$$\overset{0}{\Omega}(x) + 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{2ns}{\Omega}(x) = \frac{2\pi}{n} \cdot \sum_{p=1}^{\leq \frac{n}{2}}{}' \sin\left(x \sin \frac{p\pi}{n}\right), \quad (26_a)$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{(2n+1)\,2s+1}{\Omega}(x) = \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sum_{p=1}^{p=n+1}{}' (-1)^{p-1} \cos\left(x \sin \frac{(2p-1)\pi}{4n+2}\right), \quad (26_b)$$

formules qui sont analogues aux formules (25), et où les accents ont les mêmes significations. Posant $n = 1$, on aura de (26_a), (26) une identité et un développement nouveau de $\sin x$, tandis que (26_b) donnera, pour $n = 0$, un développement nouveau de $\cos x$.

§ 13. Les deux groupes de formules

$$\overset{2n}{T}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \omega) \,.\, \omega \,.\, \sin 2n\omega \, d\omega,$$

$$\overset{2n+1}{T}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \omega) \,.\, \omega \,.\, \cos(2n+1)\omega \, d\omega$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XV, p. 13; 1836.

et

$$\overset{n}{\Lambda}(x) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x \sin\omega - \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) d\omega,$$

$$\overset{n}{M}(x) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x \sin\omega - \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) d\omega$$

montrent que les trois fonctions $\overset{2n}{T}(x)$, $\overset{2n}{\Lambda}(x)$, $\overset{2n}{M}(x)$ donnent des formules du même genre, et que c'est la même chose pour les trois autres fonctions $\overset{2n+1}{T}(x)$, $\overset{2n+1}{\Lambda}(x)$, $\overset{2n+1}{M}(x)$.

En premier lieu, appliquant la formule générale (9_a), on aura, après une légère modification

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{2n(2s+1)}{T}(x) = \\ &\quad = \frac{\pi}{4n^2} \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^p (2n - 2p + 1) \cos\left(x \sin\frac{(2p-1)\pi}{4n}\right), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{2n(2s+1)}{\Lambda}(x) = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{p-1} \sin\left(x \sin\frac{(2p-1)\pi}{4n}\right), \tag{27_a}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{2n(2s+1)}{M}(x) = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{p-1} \cos\left(x \sin\frac{(2p-1)\pi}{4n}\right). \tag{27_b}$$

Appliquons ensuite la formule obtenue en ajoutant (7_a) et (8_a), nous aurons de même

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=\infty} \overset{(2n+1)(2s+1)}{T}(x) = \frac{\pi}{(2n+1)^2} \cdot \\ &\qquad \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{p-1} (2n - 2p + 1) \sin\left(x \sin\frac{p\pi}{2n+1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \overset{(2n+1)(2s+1)}{\Lambda}(x) = \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sum_{p=0}^{p=n}{}' (-1)^p \cos\left(x \sin\frac{p\pi}{2n+1}\right), \tag{28_a}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \overset{(2n+1)(2s+1)}{M}(x) = \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{p-1} \sin\left(x \sin\frac{p\pi}{2n+1}\right), \tag{28_b}$$

où l'accent figurant au second membre de (28_a) indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $p = 0$. Les développements du zéro ob-

tenus en faisant dans (28), (28_b) $n=0$ sont des identités, tandis que la formule (28_a) donne, pour la même valeur de n, un développement nouveau de $\frac{\pi}{2}$.

La formule (10) du § 4 donnera de même

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \overset{2s+1}{\Lambda}(x) = \frac{\pi^2}{4} \overset{0}{J}(x), \tag{29}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \overset{2s+1}{M}(x) = -\frac{\pi}{4} \overset{0}{\Omega}(x). \tag{29_a}$$

Donnons encore un développement singulier obtenu à l'aide de la formule élémentaire

$$\sin 2u + \sin 4u + \cdots + \sin 2nu = \frac{1}{2} \cot u - \frac{\cos(2n+1)u}{2 \sin u}.$$

En effet, appliquant cette identité, on aura immédiatement la formule cherchée:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{2s}{\Lambda}(x) = S_i(x), \tag{30}$$

où $S_i(x)$ désigne le sinus-intégral.

V.

Application de la fonction $\overset{n+\mu}{J}(x) \overset{n-\mu}{J}(x)$.

§ 14. La formule

$$\overset{n+\mu}{J}(x) \overset{n-\mu}{J}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{2n}{J}(2x \cos \omega) \cos 2\mu\omega \, d\omega, \tag{α}$$

où n désigne la moitié d'un nombre entier non négatif, tandis que μ est une quantité finie quelconque nous fournira un autre exemple des fonctions $F(x)$,

de sorte que nous aurons immédiatement

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} \overset{n+s\mu}{J}(x) \overset{n-s\mu}{J}(x) = \frac{1}{2}\left(\overset{n}{J}(x)\right)^2 - \frac{1}{|\mu|} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' \overset{2n}{J}\left(2x\cos\frac{(2p-1)\pi}{2\mu}\right), \quad (31)$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \overset{n+s\mu}{J}(x) \overset{n\ s\mu}{J}(x) = -\frac{1}{2}\left(\overset{n}{J}(x)\right)^2 + \frac{1}{|\mu|} \cdot \sum_{p=0}^{p=q}{}' \overset{2n}{J}\left(2x\cos\frac{p\pi}{\mu}\right). \quad (31_a)$$

formules qui sont valables dans les intervalles

$$2q-1 \leqq |\mu| < 2q+1,$$
$$2q \leqq |\mu| < 2q+2$$

respectivement.

Appliquant en outre la formule (10) du § 4, on aura de même

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \cdot \overset{n+(2s+1)\mu}{J}(x) \overset{n-(2s+1)\mu}{J}(x) = \frac{\pi}{4}\left(\overset{n}{J}(x)\right)^2, \quad -\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq +\frac{1}{2}. \quad (32)$$

Supposons maintenant dans les trois formules que nous venons d'obtenir μ égal à un nombre entier, nous aurons un groupe de formules analogues à (25). Dans le cas $n=0$, $\mu=1$ la formule correspondante (31_a) est due à P.-A. Hansen; elle peut être trouvée dans le livre de Lommel (*).

La formule (31) donnera le développement de 1 selon les carrés des fonctions cylindriques. Faisons encore dans (32) $n=0, \mu=\frac{1}{2}$ nous obtiendrons une nouvelle formule contenant les fonctions cylindriques dont les paramètres sont des moitiés d'un nombre impair.

Posons encore dans (25) $2x\cos\omega$ au lieu de x, multiplions par $\cos 2\mu\omega d\omega$ et intégrons ensuite de $\omega=0$ à $\omega=\frac{\pi}{2}$, ce qui est permis, nous aurons trois autres formules analogues à (25). Or, cette application est si facile que nous pouvons l'omettre ici; du reste, les formules ainsi obtenues peuvent être deduites aussi à l'aide des séries de Fourier que j'ai développées récemment (**) pour les fonctions $\overset{\mu}{\Pi}(2x\sin\omega)$ et $\overset{\mu}{X}(2x\sin\omega)$.

§ 15. Il nous reste encore de montrer que la fonction $\overset{n+\mu}{J}(x)\ \overset{n-\mu}{J}(x)$ nous donnera aussi un exemple des fonctions $G(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$. A cet égard, appli-

(*) Studien, p. 35.

(**) *Mathematische Annalen*, t. LII, p. 583; 1899.

quons les formules

$$\overset{2n}{J}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) \cos 2n\varphi \, d\varphi,$$

$$\overset{2n+1}{J}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \varphi) \sin(2n+1)\varphi \, d\varphi,$$

n désignant un entier, nous aurons ces deux intégrales doubles

$$\overset{n+\frac{\mu}{2}}{J}(x) \overset{n-\frac{\mu}{2}}{J}(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x \cos \omega \sin \varphi) \cos \mu \omega \cos 2n\varphi \, d\varphi \, d\omega,$$

$$\overset{n+\frac{1+\mu}{2}}{J}(x) \overset{n+\frac{1-\mu}{2}}{J}(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \cos \omega \sin \varphi) \cos \mu \omega \sin(2n+1)\varphi \, d\varphi \, d\omega,$$

de sorte que nous pouvons appliquer immédiatement les formules générales du § 8.

Or, je dis que *la série déduite de la formule* (12) *n'est convergente que si* $\mu = 2r + 1$, *r désignant un entier fini.*

En effet, la condition (δ) au § 8 montre que la somme de la série en question se comporte comme l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \mu \omega}{\cos \omega} \, d\omega,$$

c'est-à-dire qu'elle est généralement infinie comme le logarithme. Du reste, l'expression asymptotique pour la fonction $\overset{\mu}{J}(x)$ donnera pour un terme très éloigné de notre série cette expression asymptotique

$$\overset{n+\frac{\mu}{2}}{J}(x) \overset{n-\frac{\mu}{2}}{J}(x) = \frac{\cos \frac{\mu \pi}{2}}{s \pi x} + \frac{\sin 2sx}{s \pi x},$$

c'est-à-dire que la série susdite est généralement divergente comme la série harmonique.

Le cas exclu, $\mu = 2r + 1$, n'offre aucun intérêt particulier, car les formules ainsi obtenues se réduisent à celles, bien connues, contenant les séries (β) de l'introduction.

Les formules (11), (13) donneront au contraire respectivement

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} J^{n+\frac{\mu}{2}}(sx)\, J^{n-\frac{\mu}{2}}(sx) = \frac{\sin n\pi \,.\, \sin\frac{\mu\pi}{2}}{n\mu\pi^2} - \\ &\qquad - \frac{2}{\pi\,.\,|x|} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' \int_0^1 \frac{\varphi^{2n}(k_p, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_p^2 z^2)}}\, dz, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^{s} J^{n+\frac{1+\mu}{2}}[(2s+1)x]\, J^{n+\frac{1-\mu}{2}}[(2s+1)x] = \\ &\qquad = \frac{2}{\pi x} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' (-1)^{p-1} \int_0^1 \frac{\varphi^{2n+1}(l_p, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-l_p^2 z^2)}}\, dz, \end{aligned}\right\} \quad (33_a)$$

qui sont valables dans les deux intervalles

$$(2q-1)\pi \leq |2x| < (2q+1)\pi,$$
$$(2q-1)\pi \leq |4x| < (2q+1)\pi$$

respectivement, et où l'on a posé

$$k_p = \sqrt{1 - \frac{(2p-1)^2\pi^2}{4x^2}}, \quad l_p = \sqrt{1 - \frac{(2p-1)^2\pi^2}{16x^2}},$$

tandis que

$$\varphi^{2n}(\lambda, z) = \cos(\mu \arcsin \lambda z) \,.\, \cos\left(2n \arcsin\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2 z^2}}\right),$$

$$\varphi^{2n+1}(\lambda, z) = (\cos \mu \arcsin \mu z) \,.\, \sin\left((2n+1) \arcsin\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2 z^2}}\right).$$

Dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$ la série (33) a constamment la somme zéro, pourvu que $n > 0$; c'est la même chose pour la série (33_a) dans l'intervalle $-\frac{\pi}{4} < x < +\frac{\pi}{4}$ et cela aussi pour $n = 0$.

§ 16. Les fonctions discontinues définies à l'aide des séries infinies (33) possèdent un nombre de propriétés remarquables dont voici les plus intéressantes:

1.° *Supposons* μ *égal à un nombre entier, pair ou impar respectivement, les sommes de nos séries se présentent sous forme d'une fonction linéaire d'un nombre fini des trois intégrales elliptiques complètes.*

En effet, la fonction $\varphi^n(\lambda, z)$ se réduit dans ce cas à une fonction rationnelle de $1 - \lambda^2 z^2$. Supposons par exemple $n = 0$ et $\mu = 0$ ou $\mu = 1$ respectivement, nous aurons

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} [\overset{0}{J}(s x)]^2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi |x|} \cdot \sum_{p=1}^{p=q}{}' F\left(\frac{\pi}{2}, k_p\right), \tag{34}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{0}{J}[(2s+1)x] \overset{1}{J}[(2s+1)x] = \frac{2}{\pi x} \sum_{p=1}^{p=q}{}' (-1)^{p-1} l'_p F\left(\frac{\pi}{2}, l_p\right), \tag{34$_a$}$$

où $F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$ désigne l'intégrale elliptique complète de première espèce et du module λ, tandis que λ' est le module complémentaire, savoir

$$\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Supposant encore $n = 0$ et $\mu = 2$ ou $\mu = 3$ respectivement, on trouve aussi des intégrales de deuxième espèce, tandis que l'hypothèse $n = 1$ et $\mu = 2$ ou $\mu = 3$ nous conduira déjà aux intégrales de troisième espèce.

Les formules (34) donneront encore deux développements remarquables pour la fonction $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ selon les produits de deux fonctions cylindriques. En effet, posons respectivement

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4},$$

nous aurons sans peine

$$\frac{4k'}{\pi^2} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left[\overset{0}{J}\left(\frac{s\pi}{2k'}\right)\right]^2, \tag{35}$$

$$\frac{8k'^2}{\pi^2} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \overset{0}{J}\left(\frac{2s+1}{4k'}\pi\right) \overset{1}{J}\left(\frac{2s+1}{4k'}\pi\right), \tag{35$_a$}$$

formules qui sont valables pourvu que

$$0 < k < \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

2.° *Supposant* μ *égal à un nombre entier impair ou pair respectivement, on retrouve les formules bien connues contenants les séries* (β) *de l'introduction.*

3.° *Supposons enfin* μ *égal à la fraction irréductible* $\frac{p}{q}$, *les sommes de nos deux séries s'expriment sous forme d'une fonction linéaire d'un nombre fini des intégrales hyperelliptiques dont les polynômes figurant sous le signe de la racine carrée sont du degré* $q+2$ *ou* $q+1$ *selon que* p *et pair ou impair.*

Pour démontrer la vérité de cette assertion posons

$$\lambda z = \sin \omega,$$

ce qui donnera

$$\frac{\varphi^n(\lambda, z)\, d z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2 z^2)}} = - \frac{\cos\left(\frac{k}{q}\,\omega\right) f^n(\cos \omega)}{\sqrt{\cos^2 \omega - \lambda'^2}}\, d\omega,$$

f désignant une fonction rationnelle. Posons ensuite

$$\cos^2 \frac{\omega}{q} = \zeta,$$

nous aurons

$$d\omega = - \frac{q\, d\zeta}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)}},$$

ce qui nous conduira immédiatement au but.

Dans les deux cas $\mu = \frac{1}{2}$ ou $\mu = \frac{1}{3}$ on retombe dans des intégrales elliptiques non complètes.

Le presbytère de Fœns (en Fionie), le 17 août 1900.

Sur une classe de polynômes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques. (Deuxième partie.) *

(Par Niels Nielsen, *à Copenhague.)*

Dans cette deuxième partie de mes recherches sur le polynôme:

$$\overset{\mu,n}{R}(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n+1}{2}} (-1)^s \cdot \frac{(n-s)!}{s!} \binom{\mu+n-s}{n-2s} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}$$

je me suis proposé de montrer comment les formules fondamentales de Lommel nous conduiront à l'équation différentielle obtenue par M. Hurwitz pour notre polynôme. Après avoir démontré cette équation je déduis une nouvelle formule récursive très remarquable pour le calcul du polynôme R, formule qui fait voir clairement la nature flexible de notre polynôme, analogue à celle connue pour les fonctions et particulièrement pour les nombres de Jacques Bernoulli.

Enfin, dans le dernier paragraphe on trouvera une application du polynôme susdit sur la résolution d'une équation aux différences finies linéaire et non homogène, résolution qui nous donnera un nombre de formules contenant les polynômes R et les fonctions rationnelles $\overset{n}{O}(x)$ et $\overset{n}{S}(x)$ de M. Neumann et de Schläfli.

(*) V. première partie dans ce journal, 3.e S., t. V., p. 17; 1900.

§ 1. Équation de M. Hurwitz. Formules récursives pour $\overset{\mu,n}{R}(x)$.

Pour démontrer que le polynôme $\overset{\mu,n}{R}(x)$ est intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire et homogène prenons pour point de départ ces quatre formules de Lommel qui peuvent être trouvées dans la première partie (*) [(9), p. 22; (9_a), p. 23; (13) et (13_a), p. 25], savoir:

$$\overset{\mu-1,n+1}{R}(x) + \overset{\mu+1,n-1}{R}(x) = \frac{2\mu}{x}\overset{\mu,n}{R}(x), \tag{α}$$

$$\overset{\mu,n-1}{R}(x) + \overset{\mu,n+1}{R}(x) = \frac{2(\mu+n+1)}{x}\overset{\mu,n}{R}(x), \tag{β}$$

$$D_x\overset{\mu,n}{R}(x) = -\frac{n}{x}\overset{\mu,n}{R}(x) + \overset{\mu,n-1}{R}(x) - \overset{\mu+1,n-1}{R}(x), \tag{γ}$$

$$D_x\overset{\mu,n}{R}(x) = \frac{2\mu+n+2}{x}\overset{\mu,n}{R}(x) - \overset{\mu,n+1}{R}(x) - \overset{\mu+1,n-1}{R}(x). \tag{δ}$$

Dans la première partie ces deux dernières formules se présentent défigurées par une faute d'impression, les derniers termes des seconds membres ayant en effet le signe +.

Les deux premières de nos formules donnent immédiatement cette autre:

$$\overset{\mu-1,n}{R}(x) + \overset{\mu+1,n}{R}(x) = \frac{4\mu(\mu+n+1)}{x^2}\overset{\mu,n}{R}(x) - \overset{\mu+1,n-2}{R}(x) - \overset{\mu-1,n+2}{R}(x), \tag{1}$$

qui nous sera bien utile aussitôt. Pour démontrer la formule (1) il suffit d'exprimer, à l'aide de (α), chacune des fonctions figurant au premier membre et d'appliquer ensuite (β).

Éliminant, à l'aide de (α), la fonction $\frac{2\mu}{x}\overset{\mu,n}{R}(x)$, figurant au second membre de (δ), on verra que (γ), (δ) se présentent sous cette forme plus élégante:

$$D_x\overset{\mu,n}{R}(x) + \frac{n}{x}\overset{\mu,n}{R}(x) = \overset{\mu,n-1}{R}(x) - \overset{\mu+1,n-1}{R}(x), \tag{2}$$

(*) Ce journal, 3.e série, t. V, fasc. I, p. 17-31, 1900. Je cite toujours cette première partie en écrivant dans une parenthèse le numéro de la formule en question et le page du volume susdit où elle peut être trouvée.

$$D_x \overset{\mu,n}{R}(x) - \frac{n+2}{x} \overset{\mu,n}{R}(x) = \overset{\mu-1,n+1}{R}(x) - \overset{\mu,n+1}{R}(x). \tag{2_a}$$

Posant encore dans (2) $\mu - 1$ au lieu de μ et $n+2$ au lieu de n, on aura, à l'aide de (2_a), cette formule remarquable :

$$D_x \left(\overset{\mu,n}{R}(x) - \overset{\mu-1,n+2}{R}(x) \right) = \frac{n+2}{x} \left(\overset{\mu,n}{R}(x) + \overset{\mu-1,n+2}{R}(x) \right), \tag{3}$$

ou bien, après avoir posé $\mu + 1$ au lieu de μ et $n - 2$ au lieu de n :

$$D_x \left(\overset{\mu,n}{R}(x) - \overset{\mu+1,n-2}{R}(x) \right) = -\frac{n}{x} \left(\overset{\mu,n}{R}(x) + \overset{\mu+1,n-2}{R}(x) \right). \tag{3_a}$$

Démontrons maintenant comment les cinq formules de (1) à (3_a) nous conduiront à l'équation différentielle cherchée.

En effet, différentions par rapport à x la formule (2), nous aurons, en exprimant, à l'aide de (2_a), les dérivées obtenues au second membre :

$$y'' - \frac{1}{x} y' - \frac{n(n+2)}{x^2} y = \overset{\mu-1,n}{R}(x) - 2 \overset{\mu,n}{R}(x) + \overset{\mu+1,n}{R}(x),$$

où y désigne le polynôme $\overset{\mu,n}{R}(x)$. Cela posé, appliquons (1), nous aurons :

$$y'' - \frac{1}{x} y' - \left(\frac{n(n+2) + 4\mu(\mu+n+1)}{x^2} - 2 \right) y = - \overset{\mu-1,n+2}{R}(x) - \overset{\mu+1,n-2}{R}(x). \tag{ε}$$

Différentions de nouveau par rapport à x, nous obtiendrons, en vertu de (3), (3_a), pour le second membre cette expression :

$$-2y' + \frac{2}{x} y + \frac{n+2}{x} \left(\overset{\mu-1,n+2}{R}(x) + \overset{\mu+1,n-2}{R}(x) \right) - \frac{2n+2}{x} \overset{\mu+1,n-2}{R}(x),$$

d'où, à l'aide de (ε) :

$$\left.\begin{aligned} & y''' + \frac{n+1}{x} y'' + \left(4 - \frac{(n+1)(n+2) + 4\mu(\mu+n+1) - 1}{x^2} \right) y' + \\ & \quad + \left(\frac{2n+2}{x} - \frac{n^2(n+2) + 4n\mu(\mu+n+1)}{x^2} \right) y = \\ & \qquad = - \frac{2n+2}{x} \overset{\mu+1,n-2}{R}(x). \end{aligned}\right\} \tag{ζ}$$

Enfin, différentions encore une fois par rapport à x, nous aurons, a l'aide de (3_a), pour le second membre cette expression :

$$- \frac{2n+2}{x} y' - \frac{2n(n+1)}{x^2} y - \frac{2(n+1)(n-1)}{x^2} \overset{\mu+1,n-2}{R}(x),$$

ce qui donnera finalement, en vertu de (ζ):

$$\left.\begin{aligned} & y^{\mathrm{IV}} + \frac{2}{x} y''' + \left(4 - \frac{2(n+1)^2 + 4\mu(\mu+n+1) - 1}{x^2}\right) y'' + \\ & \quad + \left(\frac{8}{x} + \frac{2(n+1)^2 + 4\mu(\mu+n+1) - 1}{x^3}\right) y' + \\ & \quad + \frac{n(n+2)(n+2\mu)(n+2\mu+2)}{x^4} y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

et voilà l'équation différentielle que M. Hurwitz (*) a énoncée sans démonstration dans son fondamental Mémoire sur les zéros de la fonction $\overset{\mu}{J}(x)$. La fonction g_m de M. Hurwitz s'exprime à l'aide de $\overset{\mu,n}{R}(x)$ de la manière suivante :

$$g_m^{\mu}(z) = (i\sqrt{z})^m \cdot \overset{\mu-1,m}{R}(2i\sqrt{z}).$$

La formule (3_a) qui nous a été si utile pour la démonstration de (4) donnera, à l'aide de (γ) et en remarquant que les deux polynômes $\overset{\nu,0}{R}(x)$ et $\overset{\nu,-1}{R}(x)$ sont indépendantes de x tous les deux, cette autre formule:

$$\overset{\mu+1,n-1}{R}(x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x) = \frac{2}{x} \cdot \sum_{p=1}^{\leqq \frac{n}{2}} (n-2p+1) \overset{\mu+p,n-2p}{R}(x) \tag{5}$$

qui ne peut pas être déduite à l'aide des formules analogues développées dans la première partie (pp. 26, 27).

Nous avons encore à démontrer une formule, nouvelle que je sache, qui permettra d'exprimer le polynôme $R(x)$ à l'aide des polynômes du même genre et dont les indices entiers sont égaux à $\frac{n}{2}$ au plus. A cet égard prenons pour point de départ la formule :

$$\frac{\overset{\mu}{J}(x)}{r!} = \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)!} \binom{\mu - r + s - 1}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^s \overset{\mu-2r+s}{J}(x),$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, p. 251, note; 1889. (Du reste, l'intégrale complète de l'équation (4) peut s'écrire sous cette forme:

$$y = x\left(a \overset{\mu}{J}(x) \overset{\mu+n+1}{J}(x) + b \overset{\mu}{J}(x) \overset{\mu+n+1}{Y}(x) + c \overset{\mu}{Y}(x) \overset{\mu+n+1}{J}(x) + d \overset{\mu}{Y}(x) \overset{\mu+n+1}{Y}(x)\right),$$

ce qui s'accorde bien avec la formule fondamentale de Lommel, voir (γ), p. 7.)

où r désigne un entier non négatif (*). Posons maintenant $\mu + m$ au lieu de μ, nous aurons, d'après une formule démontrée dans la première partie [(10), p. 24], cette formule remarquable :

$$\frac{\overset{\mu,m}{R}(x)}{r\,!} = \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^{r-s}}{(r-s)\,!} \binom{\mu + m - r - s}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^s \overset{\mu,m-2r+s}{R}(x), \tag{6}$$

où nous avons posé $\mu + 1$ au lieu de μ. Il est évident qu'une foule de formules plus particulières peut être déduite de (6). Supposons par exemple que le positif entier m, soit égal à $2\,r$ ou à $2\,r+1$, les formules correspondantes se présentent sous forme très élégante.

§ 2. Résolution de l'équation aux différences finies $\overset{n-1}{G}(x) + \overset{n+1}{G}(x) = \frac{2\,n}{x}\overset{n}{G}(x) + \frac{2}{x}\overset{n}{g}(x)$, n entier.

En supposant que $\overset{\mu}{G}(x)$ satisfasse à cette équation linéaire aux différences finies :

$$\overset{\mu-1}{G}(x) + \overset{\mu+1}{G}(x) = \frac{2\,\mu}{x}\overset{\mu}{G}(x) + \frac{2}{x}\overset{\mu}{g}(x), \tag{α}$$

où $\overset{\mu}{g}(x)$ désigne une fonction donnée de x et de μ, nous aurons [(14), p. 26] :

$$\overset{\mu+n}{G}(x) = \overset{\mu\quad 1,n}{R}(x)\,\overset{\mu}{G}(x) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\,\overset{\mu-1}{G}(x) + \frac{2}{x}\sum_{p=0}^{p=n-1}\overset{\mu+p}{g}(x)\,\overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x). \tag{β}$$

Remarquant en outre que $\cos\mu\pi\,.\,\overset{-\mu}{G}(x)$ satisfait aussi à une équation déduite de (α) en y remplaçant $\overset{\mu}{g}(x)$ par $-\cos\mu\pi\,.\,\overset{-\mu}{g}(x)$, on aura encore, après avoir changé le signe de μ et supprimé le facteur commun $\cos\mu\pi$, cette autre formule analogue à (β) :

$$\left.\begin{aligned}(-1)^n\,\overset{\mu-n}{G}(x) &= \overset{-\mu-1,n}{R}(x)\,\overset{\mu}{G}(x) + \overset{-\mu,n-1}{R}(x)\,\overset{\mu+1}{G}(x) - \\ &- \frac{2}{x}\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\,\overset{\mu-p}{g}(x)\,\overset{-\mu+p,n-p-1}{R}(x).\end{aligned}\right\} \tag{β'}$$

(*) Ce journal, 3.e série, t. VI, p. 94; 1901.

Inversement, la formule (β) au § 1 montrera immédiatement que la fonction $\overset{\mu\pm n}{G}(x)$ satisfait à l'équation obtenue de (α) en y posant $\mu \pm n$ au lieu de μ, pourvu que $\overset{\mu}{G}(x)$ satisfasse à (α) elle-même.

Il est bien remarquable que le second membre de (β) *doit être une fonction de* $\mu \pm n$.

Supposons maintenant $\mu = 1$ et mettons $n-1$ au lieu de n, nous aurons, en vertu de (β):

$$\overset{n}{G}(x) = \overset{0,n-1}{R}(x)\,\overset{1}{G}(x) - \overset{1,n-2}{R}(x)\,\overset{0}{G}(x) + \frac{2}{x}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-2}\overset{p+1}{g}(x)\,.\,\overset{p+1,n-p-2}{R}(x), \tag{7}$$

tandis que (β') donnera pour $\mu = -1$:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^n\overset{-n}{G}(x) = \overset{0,n-1}{R}(x)\,\overset{1}{G}(x) - \overset{1,n-2}{R}(x)\,\overset{0}{G}(x) - \\ -\frac{2}{x}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\,\overset{-p}{g}(x)\,\overset{p,n-p-1}{R}(x),\end{aligned}\right\} \tag{7_a}$$

car nous aurons toujours:

$$\overset{-1}{G}(x) = \frac{2}{x}\,\overset{0}{g}(x) - \overset{1}{G}(x).$$

Cela posé, nous avons démontré cette proposition:

Les formules (7), (7_a) *nous donnent la solution complète de l'équation aux différences finies* (α), *pourvu que* μ *soit égal à un nombre entier.* $\overset{0}{G}(x)$ *et* $\overset{1}{G}(x)$ *sont deux fonctions arbitraires de* x.

Dans mon Mémoire: *Évaluation nouvelle etc.* (*) j'ai donné, à l'aide des séries *neumanniennes* de première espèce, la solution d'une équation particulière de la forme (α).

Posons par exemple

$$\overset{n}{g}(x) = 2\cos^2\frac{n\pi}{2}, \quad \overset{0}{G}(x) = 0, \quad \overset{1}{G}(x) = \frac{2}{x},$$

nous retrouvons la fonction $\overset{n}{S}(x)$ de Schläfli exprimée à l'aide des polynômes R [(20), p. 28]. Or, en se rappelant la formule

$$\overset{n}{O}(x) = \frac{2n}{x}\,\overset{n}{S}(x) + \frac{\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x},$$

(*) Ce journal, 3.e série, t. VI, p. 106; 1901.

on retombe par là dans les deux formules qui se présentent sous forme masquée dans le beau livre de M. J.-H. GRAF (*).

En remarquant que $\overset{n}{J}(x)$ et $\overset{n}{Y}(x)$ représentent deux solutions, indépendantes entre elles, de l'équation homogène qui correspond à (α), on trouvera aisément les formules (7), (7_a) aussi à l'aide de la méthode générale de LAGRANGE (**) et en appliquant cette formule fondamentale de LOMMEL:

$$\overset{\mu}{Y}(x)\overset{\mu+n}{J}(x)-\overset{\mu+n}{Y}(x)\overset{\mu}{J}(x)=\frac{2}{x}\overset{\mu,n-1}{R}(x), \tag{γ}$$

où n désigne un positif entier.

Désignons maintenant par $\overset{n}{G_1}(x)$ une solution, différente de $\overset{n}{G}(x)$, nous aurons une équation de cette forme [(22), p. 29]:

$$\overset{n}{G}(x)-\overset{n}{G_1}(x)=a(x)\overset{n}{J}(x)+b(x)\overset{n}{Y}(x), \tag{8}$$

où $a(x)$, $b(x)$ sont deux fonctions convenables de x mais indépendantes de n. Or, cette formule peut être vérifiée aisément à l'aide de (7), (7_a). En effet, posons dans (8) $n=0$ et $n=1$, nous aurons, en vertu de (γ):

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{x}a(x)&=\left(\overset{1}{G}(x)-\overset{1}{G_1}(x)\right)\overset{0}{Y}(x)-\left(\overset{0}{G}(x)-\overset{0}{G_1}(x)\right)\overset{1}{Y}(x),\\ \frac{2}{x}b(x)&=\left(\overset{0}{G}(x)-\overset{0}{G_1}(x)\right)\overset{1}{J}(x)-\left(\overset{1}{G}(x)-\overset{1}{G_1}(x)\right)\overset{0}{J}(x),\end{aligned}\right\} \tag{8_a}$$

ce qui donnera, à l'aide de (γ):

$$\left.\begin{aligned}a(x)\overset{n}{J}(x)+b(x)\overset{n}{Y}(x)=\overset{0,n-1}{R}(x)&\left(\overset{1}{G}(x)-\overset{1}{G_1}(x)\right)-\\ -\overset{1,n-2}{R}(x)&\left(\overset{0}{G}(x)-\overset{0}{G_1}(x)\right),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

et voilà précisément la formule qu'il fallait de démontrer.

Supposons que $a(x)$, $b(x)$ soient deux fonctions arbitraires de x mais indépendantes de n, le second membre de (8) représente la solution complète de l'équation homogène qui correspond à (α). Or, mettons:

$$a(x)=\frac{x}{2}\overset{k}{Y}(x),\quad b(x)=-\frac{x}{2}\overset{k}{J}(x),$$

(*) *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen*, fasc. II, p. 41; Berne 1900.

(**) Voir par exemple MARKOFF: *Differenzenrechnung*, p. 151; Leipsic 1896.

k désignant un nombre entier fixe indépendant de n, nous aurons, en vertu de (γ):

$$a(x)\overset{n}{J}(x) + b(x)\overset{n}{Y}(x) = \overset{k,n-k-1}{R}(x), \tag{δ}$$

de sorte que *cette fonction définie pour les valeurs négatives de* $n-k-1$ *à l'aide de la formule* [(6_a), p. 21]:

$$\overset{\mu,-n-1}{R}(x) = (-1)^n \overset{-\mu,n-1}{R}(x) = -\overset{\mu-n,n-1}{R}(x),$$

représente aussi une solution de notre équation homogène, résultat qui s'accorde bien avec la forme générale d'une telle solution.

J'ai traité cette question d'une manière si détaillée pour corriger une faute d'écriture qui a echappée à mon attention dans les épreuves de la première partie. La remarque faite au p. 23 nie simplement cette propriété de $\overset{k,n-k-1}{R}(x)$.

En prenant pour point de départ la fonction $\overset{\mu+\nu}{G}(\alpha x)$, α et ν désignant deux quantités finies quelconques, on peut beaucoup généraliser la formule (β) de ce paragraphe. En effet, la fonction susdite satisfait à une équation de la forme (α), pourvu que $\overset{\mu}{g}(x)$ soit remplacée par

$$\left(\frac{\nu+\mu}{\alpha} - \mu\right)\overset{\mu+\nu}{G}(\alpha x) + \frac{1}{\alpha}\overset{\mu+\nu}{g}(\alpha x).$$

Cela posé, appliquons de nouveau (β), nous aurons, après avoir posé y au lieu de αx et $\nu-\mu$ au lieu de ν, cette formule générale:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\nu+n}{G}(y) = \overset{\mu-1,n}{R}(x)\,\overset{\nu}{G}(y) - \overset{\mu,n-1}{R}(x)\,\overset{\nu-1}{G}(y) &+ \\ + \frac{2}{y}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}\overset{\nu+p}{g}(y)\,\overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x) &+ \\ + 2\sum_{p=0}^{p=n-1}\left(\frac{\nu+p}{y} - \frac{\mu+p}{x}\right)\overset{\nu+p}{G}(y)\,\overset{\mu+p,n-p-1}{R}(x)&\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

qui est bien remarquable à cause des quatre variables qu'elle contient. Il est clair que cette formule n'est autre chose qu'une conséquence des propriétés fondamentales des polynômes R, de sorte qu'elle dénonce de nouveau la nature flexible des polynômes susdits. Néanmoins, une démonstration de (10) par un calcul direct semble être un peu longue.

Or, il est clair que la formule (10) pourra donner une foule d'autres ou en spécialisant les quantités μ, ν, x, y ou en introduisant des fonctions particulières au lieu de G. C'est par ce point de vue que j'ai déduit, dans la première partie, une suite de formules contenant les polynômes R, en supposant G égal à une fonction cylindrique.

Voici maintenant quelques autres formules particulières déduites de (10):

1.° $x=\infty$, posant

$$\overset{n}{H}(x)=\frac{n}{2x}\overset{n}{G}(x)+\frac{1}{2x}\overset{n}{g}(x), \tag{ε}$$

et appliquant la formule:

$$\overset{\mu,k}{R}(\infty)=\cos\frac{k\pi}{2},$$

on aura, après avoir écrit x au lieu de y et posé $\nu=0$:

$$\overset{n}{G}(x)=4\,.\sum_{p=1}^{p=n-1}\sin\frac{n-p}{2}\pi\,.\,\overset{p}{H}(x)+\sin\frac{n\pi}{2}\overset{1}{G}(x)+\cos\frac{n\pi}{2}\overset{0}{G}(x), \tag{11}$$

formule qui peut être déduite aussi à l'aide de celle:

$$\overset{n-1}{G}(x)+\overset{n+1}{G}(x)=4\overset{n}{H}(x), \tag{ξ}$$

qui est une conséquence immédiate de (ε). Pour les fonctions $\overset{n}{O}(x)$, $\overset{n}{S}(x)$ on retrouve par là une formule observée par M. Graf (*) pour la première fois, d'après ce que je sais.

2.° $x=-y$, $\nu=1$, $\mu=1$, nous aurons, après avoir écrit x au lieu de y:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n-1}\overset{n}{G}(x)&=\overset{1}{G}(x)\overset{0,n-1}{R}(x)+\overset{0}{G}(x)\overset{1,n-2}{R}(x)+\\&+\frac{2}{x}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\left(\overset{p}{g}(x)+2p\overset{p}{G}(x)\right)\cdot\overset{p,n-p-1}{R}(x),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ou bien, en vertu de (ε):

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n-1}\overset{n}{G}(x)&=\overset{1}{G}(x)\overset{0,n-1}{R}(x)+\overset{0}{G}(x)\overset{1,n-2}{R}(x)-\\&-\frac{2}{x}\cdot\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\left(4x\overset{p}{H}(x)-\overset{p}{g}(x)\right)\overset{p,n-p-1}{R}(x).\end{aligned}\right\} \tag{12_a}$$

(*) Loc. cit., fasc. II, p. 28.

Mettons dans (12) $\overset{n}{S}(x)$ au lieu de $\overset{n}{G}(x)$, nous aurons, en vertu de [(20), p. 28]:

$$\overset{2n}{S}(x) = \frac{2}{x} \cdot \sum_{p=1}^{p=2n-1} (-1)^{p-1} \cdot p \cdot \overset{p}{S}(x) \overset{p,2n-p-1}{R}(x), \tag{13}$$

$$\overset{2n}{O}(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \cdot \sum_{p=1}^{p=2n-1} (-1)^{p-1} \cdot p \cdot \overset{p}{S}(x) \overset{p,2n-p}{R}(x), \tag{13$_a$}$$

tandis que (12_a) donnera de même:

$$\overset{2n+1}{S}(x) = 4 \cdot \sum_{p=0}^{p=2n}{}' (-1)^p \overset{p}{O}(x) \overset{p,2n-p}{R}(x), \tag{14}$$

$$\overset{2n+1}{O}(x) = 4 \cdot \sum_{p=0}^{p=2n}{}' (-1)^p \overset{p}{O}(x) \overset{p,2n-p+1}{R}(x), \tag{14$_a$}$$

où l'accent après le signe Σ indique qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $p = 0$.

On trouvera évidemment huit formules analogues contenant les deux fonctions $\overset{n}{\mathfrak{S}}_1(x)$ et $\overset{n}{\mathfrak{S}}_2(x)$ qui sont réelles pourvu que x le soit et qui peuvent être définies à l'aide de la formule:

$$\overset{n}{\mathfrak{S}}(x) = e^{-ix}\left(\overset{n}{\mathfrak{S}}_1(x) + i\,\overset{n}{\mathfrak{S}}_2(x)\right),$$

$\overset{n}{\mathfrak{S}}(x)$ désignant la fonction que j'ai introduite dans la première partie (p. 28) et que j'ai étudiée dans mon Mémoire: *Evaluation nouvelle etc.* (*)

Copenhague, le 18 janvier 1901.

(*) Ce journal, 3.e série, t. VI, p. 82.



